

**НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»**

**Інститут прикладного системного аналізу
Кафедра математичних методів системного аналізу**

До захисту допущено
В. о. завідувача кафедри
_____ О.Л. Тимощук
«__» _____ 2020 р

**Дипломна робота
на здобуття ступеня бакалавра
за освітньо-професійною програмою «Системний аналіз і управління»
спеціальності 124 «Системний аналіз»**

**на тему: «Математичні моделі економічного зростання і їх роль в забезпеченні
стабільності національної економіки»**

Виконав:

студент IV курсу, групи КА-64

Тихоненко Дмитро Володимирович _____

Керівник:

професор кафедри ММСА,

д.ф.м.н. Лопатін О.К _____

Консультант з економічного розділу:

к.е.н., доцент кафедри ТТПЕ

Шевчук Олена Анатоліївна _____

Консультант з нормоконтролю:

к.т.н., доцент кафедри ММСА

Коваленко Анатолій Єпіфанович _____

Рецензент:

к.т.н., доцент кафедри ІТ

ФІТ КНУ ім. Т. Шевченка

Красовська Ганна Валеріївна _____

Засвідчую, що у цій дипломній
роботі немає запозичень з праць інших
авторів без відповідних посилань.

Студент _____

Київ – 2020 року

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
Інститут прикладного системного аналізу
Кафедра математичних методів системного аналізу

Рівень вищої освіти – перший (бакалаврський)

Спеціальність – 124 "Системний аналіз"

Освітньо-професійна програма «Системний аналіз і управління»

ЗАТВЕРДЖУЮ

В. о. завідувача кафедри

_____ О.Л. Тимошук

«___» _____ 20__ р.

ЗАВДАННЯ

на дипломну роботу студенту

Тихоненко Дмитро Володимирович

1. Тема роботи «Математичні моделі економічного зростання і їх роль в забезпеченні стабільності національної економіки», керівник роботи Лопатін Олексій Костянтинович, д.ф.м.н., професор, затверджені наказом по університету від «___» _____ 20__ р. № _____
2. Термін подання студентом роботи _____
3. Вихідні дані до роботи
4. Зміст роботи
5. Перелік ілюстративного матеріалу (із зазначенням плакатів, презентацій тощо)
6. Дата видачі завдання _____

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання дипломної роботи	Термін виконання етапів роботи	Примітка
1	Формулювання тематики (напрямку) дослідження	03.09.2019 – 30.09.2019	
2	Затвердження теми дипломної роботи	01.10.2019 – 30.10.2019	
3	Формулювання задач дослідження	01.11.2019 – 30.11.2019	
4	Освоєння програмного пакету E&F Chaos та Desmos	01.12.2019 – 30.12.2019	
5	Дослідження моделі Солоу за допомогою пакету E&F Chaos	25.02.2020 – 20.03.2020	
6	Дослідження та аналіз s-функції Джонсона	20.03.2020 – 10.04.2020	
7	Написання статті та участь у V Міжнародній конференції «Відкриті еволюціонуючі системи»	10.04.2020 – 25.04.2020	
8	Виконання обчислювальних експериментів та оформлення результатів	30.04.2020 – 15.05.2020	
9	Оформлення пояснювальної записки	18.05.2020 – 25.05.2020	
10	Підготовка презентації для захисту	25.05.2020 – 28.05.2020	
11	Попередній захист дипломної роботи	29.05.2020 – 02.06.2020	
12	Захист дипломної роботи	15.06.2020 – 19.06.2020	

Студент

Тихоненко Дмитро Володимирович

Науковий керівник

Лопатін Олексій Костянтинович

РЕФЕРАТ

Дипломна робота: 103 ст., 38 рис., 8 табл., 1 дод., 15 джерел.

ДИНАМІЧНА СИСТЕМА, МОДЕЛЬ РОСТУ СОЛОУ, S-КРИВА ДЖОНСОНА, БІФУРКАЦІЙНА ДІАГРАМА, ФАЗОВА ДІАГРАМА, СТІЙКА ТОЧКА.

Мета: дослідження математичних моделей економічного зростання та їх ролі в забезпеченні стабільності національної економіки.

Об'єкт дослідження: закон еволюційного розвитку технологій та інноваційних процесів.

Предмет дослідження: узагальнення моделі економічного росту Солоу за рахунок вибору виробничої функції у вигляді s-кривої Джонсона.

В роботі розглядається вирішення таких задач: визначення показників і факторів економічного зростання, дослідження моделей економічного зростання, та узагальнення моделі Солоу на основі s-функції Джонсона. Для розв'язання вище перелічених задач було використано апарат теорії динамічних систем на базі програмного пакету E&F Chaos.

ABSTRACT

Bachelor thesis: 103 pages., 38 pics, 8 tables, 1 append., 15 sources

DYNAMIC SYSTEM, SOLOW GROWTH MODEL, JOHNSON S-CURVE, BIFURCATION DIAGRAM, STABILITY POINT.

The purpose of the thesis: study of mathematical models of economic growth and their role in ensuring the stability of the national economy.

Object of a research: the law of evolutionary development of technologies and innovative processes.

Subject of research: generalization of Solow's model of economic growth by choosing a production function in the form of a Johnson s-curve

The paper considers the solution of the following problems: determination of indicators and factors of economic growth, research of models of the economic growth, and generalization of Solow's model based on Johnson's s-function. The dynamic systems theory apparatus based on the E&F Chaos software package was used to solve the above problems.

ЗМІСТ

ВСТУП	8
РОЗДІЛ 1 ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ НЕЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ	9
1.1 ЗАГАЛЬНІ ПОНЯТТЯ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ.....	9
1.2 ДИСКРЕТНІ ДИНАМІЧНІ СИСТЕМИ	11
1.3 СПОСОБИ РОЗВ’ЯЗАННЯ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ	16
1.4 ГРАФІЧНИЙ АНАЛІЗ ВІДОБРАЖЕНЬ	20
1.5 НЕРУХОМІ ТОЧКИ. СТІЙКІСТЬ.	24
1.6 ЦИКЛИ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ. ТРАЄКТОРІЇ.....	26
1.7 ЧИСЛА ЛЯПУНОВА	29
1.8 ІНШІ ПРИКЛАДИ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ	32
1.9 ВИСНОВКИ ЗА РОЗДІЛОМ 1	34
РОЗДІЛ 2 МОДЕЛЬ РОСТУ СОЛОУ	35
2.1 СТРУКТУРА ЕКОНОМІКИ В БАЗОВІЙ МОДЕЛІ СОЛОУ	35
2.2 МОДЕЛЬ СОЛОУ В ДИСКРЕТНОМУ ЧАСІ	43
2.3 ПЕРЕХІДНА ДИНАМІКА В МОДЕЛІ СОЛОУ В ДИСКРЕТНОМУ ЧАСІ.....	49
2.4 МОДЕЛЬ СОЛОУ З ТЕХНОЛОГІЧНИМ ПРОГРЕСОМ	52
2.5 ВИСНОВКИ ЗА РОЗДІЛОМ 2	59
РОЗДІЛ 3 КІЛЬКІСНІ ТА ЯКІСНІ ДОСЛІДЖЕННЯ УЗАГАЛЬНЕНОЇ МОДЕЛІ СОЛОУ.....	60
3.1 УЗАГАЛЬНЕНА МОДЕЛЬ СОЛОУ.....	60
3.2 ДОСЛІДЖЕННЯ МОДЕЛІ СОЛОУ НА ОСНОВІ S-ФУНКЦІЇ ДЖОНСОНА.....	63
3.3 ВИСНОВКИ ЗА РОЗДІЛОМ 3	76
РОЗДІЛ 4. ФУНКЦІОНАЛЬНО-ВАРТІСНИЙ АНАЛІЗ ПРОГРАМНОГО ПРОДУКТУ.....	78
4.1 ПОСТАНОВКА ЗАВДАННЯ ПРОЕКТУВАННЯ.....	78
4.2 ОБҐРУНТУВАННЯ ФУНКЦІЙ ПРОГРАМНОГО ПРОДУКТУ	78

	7
4.3 ОБҐРУНТУВАННЯ СИСТЕМИ ПАРАМЕТРІВ ПП	80
4.4 ЕКОНОМІЧНИЙ АНАЛІЗ ВАРІАНТІВ РОЗРОБКИ ПП	86
4.5 ВИБІР КРАЩОГО ВАРІАНТА ПП ТЕХНІКО-ЕКОНОМІЧНОГО РІВНЯ.....	89
4.6 ВИСНОВКИ ЗА РОЗДІЛОМ 4	90
ВИСНОВКИ.....	92
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ	93
ДОДАТКИ	95

ВСТУП

Рівень життя в межах країни залежить від того, в якому стані знаходиться державна економіка. В свою чергу економіка, як складна структура, залежить від великої кількості різноманітних факторів, зовнішніх та внутрішніх, таких як географічне положення, трудові ресурси, міжнародні зв'язки, розвиток господарства та промисловості тощо.

Економічне зростання – це регулярне розширення масштабів діяльності всіх суб'єктів господарювання, яке виявляється у збільшенні абсолютних розмірів ВВП, ВНП, НД в країні в цілому і на душу населення. Характер і динаміка економічного розвитку країни є предметом найпильнішої уваги вчених. Від того, які процеси відбуваються в динаміці і рівні розвитку, які при цьому відбуваються структурні зміни в національній економіці, залежить дуже багато чого в житті країни та її перспективи.

Метою роботи є дослідження математичних моделей економічного зростання, їх особливостей, а також рівня впливу різноманітних параметрів на якість цих моделей.

В першому розділі розглядається загальна теорія щодо теорії нелінійних динамічних систем, пошуку нерухомих точок та визначення їх стійкості.

В другому розділі розглядається узагальнена модель Солоу, а також модель Солоу на основі s -функції Джонсона та їх параметри. Проводиться кількісний та якісний аналіз побудованої моделі економічного зростання.

Для реалізації поставленої мети необхідно вирішити такі завдання: визначення економічного зростання, показників і факторів економічного зростання; визначення типів економічного зростання; аналіз моделей економічного зростання; розвиток моделі зростання Р. Солоу.

РОЗДІЛ 1 ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ НЕЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

1.1 Загальні поняття динамічних систем

Спочатку термін «динамічна система» використовувався по відношенню до механічних систем, поведінку яких можна описати диференціальними рівняннями. Наприкінці XIX століття А.М. Ляпунов та А. Пуанкаре отримали головні результати щодо динамічних систем. Однак з часом стало зрозуміло, що динамічні системи можна використовувати в будь-якій науці, що вивчає процеси, які розвиваються. Визначення динамічної системи є нічим іншим, як формалізацією наукової концепції детермінованого процесу з математичної точки зору. Якщо майбутнє та минуле процесу однозначно визначається його теперішнім станом, то такий процес є детермінованим. Іноді розглядаються процеси, теперішній стан яких визначає лише їх майбутнє. Такі процеси є напівдетермінованими (незворотними) [1].

Майбутнє багатьох фізичних, економічних, біологічних, екологічних та соціальних систем можна передбачити (з певною похибкою), якщо знати в якому стані вони знаходяться та за яким законом еволюціонують. Якщо закон еволюції цих систем не змінюється з часом, то їх майбутнє можна розглядати як повністю визначене початковим станом цих систем. Отже, визначення динамічної системи включає в себе множину станів системи (простір станів чи фазовий простір) та закон еволюції системи з плином часу.

Всі можливі стани системи складають множину X , що називається простором станів, та визначаються її точками. Знаючи точку $x \in X$ можна визначити еволюцію системи в майбутньому.

Приклад 1.1 (Динаміка чисельності ізольованої популяції). Давайте розглянемо ізольовану популяцію, всі особини якої мають однакові незмінні умови для життя, та не відчують на собі зовнішніх впливів. Якщо нас цікавить часова динаміка, то стан системи можна описати одним єдиним числом, наприклад – чисельністю популяції N . Моделі, що не враховують просторову організацію популяції називаються локальними. З точки зору

популяційної біології це означає, що, по-перше, що кожна особа з популяції має однаковий доступ до будь-яких ресурсів, по-друге, всі особи мають однаковий шанс зустріти іншу особу (конкурента). Як приклад можна взяти популяцію кролів, яких завезли в Австралію. Будемо вважати, що не залежно від кількості особин в популяції, щільність кроликів на континенті однакова. Таким чином, щоб записати та аналізувати математичну модель, перш за все треба зрозуміти з якими одиницями виміру ми будемо працювати.

Оскільки кількість осіб не може бути від'ємною, то простір подій в даному випадку буде $X = \mathbb{R}_+$, де $\mathbb{R}_+ = \{N \in \mathbb{R}: N \geq 0\}$. Також варто зазначити, що якщо розглядати чисельність як функцію залежну від часу, то вона має бути цілочисельною, тобто $N(t) \in \{N \in \mathbb{Z}: N \geq 0\}$. Середня швидкість росту популяції в інтервалі часу $(t, t + \Delta t]$ описується величиною

$$\frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{\Delta t}.$$

Якщо чисельність популяції досить велика, то зміни кількості особин, що спричинені народженням та смертю окремих тварин, являються дуже малими на графіку функції $N(t)$. Тому ми встановлюємо існування похідної за часом:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{\Delta t}.$$

Позначимо похідну за часом крапкою над змінною:

$$\frac{dN(t)}{dt} \equiv \dot{N}.$$

Величина \dot{N}/N показує, як в середньому одна особина вплинула на розмір популяції.

1.2 Дискретні динамічні системи

Тепер давайте розглянемо дискретні відображення. Це клас динамічних систем, які активно використовуються під час моделювання біологічних, економічних, соціальних та інших процесів. Одновимірні дискретні відображення являються найпростішими системами, розв'язання яких може демонструвати хаотичні режими.

Велика кількість біологічних популяцій не має властивість неперервної зміни чисельності своїх особин. В таких випадках зміна чисельності послідовних поколінь відбувається в дискретні моменти часу. Втім для примітивних організмів проміжки між моментами часу можуть бути досить малими, і тоді неперервна за часом модель стає гарним способом моделювання процесу.

Таким чином, математичні моделі повинні відображати чисельність популяції в момент $t+1$, яку ми позначимо як N_{t+1} , через її чисельність в попередній момент часу t , позначимо N_t (тобто майбутня чисельність популяції повністю визначається її теперішнім станом).

Це призводить до необхідності дослідження динамічних систем з дискретним часом у вигляді (1.1):

$$N_{t+1} = f(N_t), \quad N_t \in \mathbb{R}, \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (1.1)$$

або ж (1.2), якщо позначити інакше,

$$N \mapsto f(N), \quad N \in \mathbb{R}, \quad (1.2)$$

де f – задане відображення, яке зазвичай залежить від ряду параметрів.

Наприклад, дискретне логістичне рівняння (відображення Фергюльста) є окремим випадком динамічної системи вигляду (1.1) або (1.2):

$$N_{t+1} = rN_t \left(1 - \frac{N_t}{K}\right), \quad r, K > 0.$$

Особливою рисою скалярних динамічних систем вигляду (1.1), (1.2) є те, що їх можна легко ітерувати при наявності деякої початкової умови N_0 .

Приклад 1.2 (Експонентне зростання). Нехай N_0 – початкова чисельність популяції, а N_t – її чисельність через t років. Зміну чисельності за рік називаємо коефіцієнтом приросту:

$$r(t) = \frac{N_{t+1} - N_t}{N_t}.$$

Якщо чисельність стала, тобто $r(t) = r = \text{const}$, то закон, що відображає динаміку чисельності популяції має вигляд (1.3):

$$N_{t+1} = (1 + r)N_t. \quad (1.3)$$

Рівняння (1.3) являється лінійним та легко розв'язується. Через t років матимемо чисельність популяції

$$N_t = (1 + r)^t N_0.$$

Зміна чисельності залежить від знаку коефіцієнта приросту: необмежено зростає в геометричній прогресії, якщо $r > 0$, прямує до нуля, якщо $-1 < r < 0$, та не змінюється при $r = 0$. Ця ж формула буде використовуватися в наступному прикладі для підрахунку складних відсотків.

Однак, варто відзначити, що експонентне зростання чисельності популяції не може тривати постійно, і в певний момент часу чисельність почне скорочуватися.

Розглянемо розмноження кільчатих черв'яків. Нехай всі черви діляться одночасно та породжують однакову кількість нових – a . Якщо N_t – кількість

черв'яків в t -ому поколінні, то рівняння динаміки популяції має знайомий нам вигляд:

$$N_{t+1} = aN_t,$$

а його розв'язком виступає рівняння

$$N_t = a^t N_0,$$

де N_0 – початкова кількість черв'яків.

В загальному випадку, якщо врахувати ефект перенаселення, обмежений доступ до ресурсів і саморегуляцію чисельності популяції, можна зробити припущення, що при незмінних зовнішніх умовах існує певна максимальна чисельність кожної окремої популяції N_{max} . До того ж графік функції $f(N)$ зростає, при $N < N_m$, де $N_m = f^{-1}(N_{max})$ і спадає при $N > N_m$ (рис. 1.1).

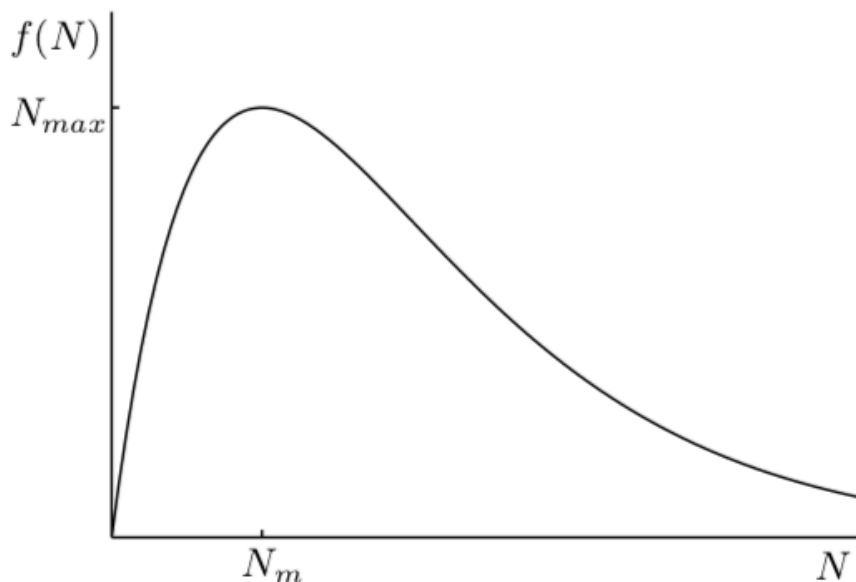


Рисунок 1.1 – Типовий вигляд графіка функції $f(N)$ моделі росту популяції вигляду $N_{t+1} = f(N_t)$

Отже, коефіцієнт приросту популяції не є сталою величиною і залежить від теперішньої чисельності N_t . Таку залежність можна формально зобразити у вигляді:

$$N_{t+1} = (1 + r(N_t))N_t.$$

Приклад 1.3 (Динаміка банківського вкладу). Припустимо що людина поклала на банківський рахунок грошову суму в розмірі S_0 під r річних відсотків. Значення нарощеної суми вкладу $S(t)$ через t років залежить від частоти нарахування відсотків.

Якщо відсотки нараховуються один раз на рік, то суму $S(t)$ можна порахувати за рекурентною формулою складних відсотків:

$$S(t + 1) = (1 + r)S(t), t = 0, 1, 2,$$

Це різницеве рівняння 1-го порядку, в якому одиниця часу являється роком, та з початковою умовою $S(0) = S_0$. Можна помітити, що рівняння задає геометричну прогресію зі знаменником $q = 1 + r$ і тому його легко вирішити: в кінці року t сума вкладу складатиме:

$$S(t) = S_0(1 + r)^t.$$

Якщо ж припустити, що ті ж самі відсотки r нараховуються двічі на рік (r – номінальна відсоткова ставка), то нове різницеве рівняння матиме вигляд:

$$S(t + 1) = \left(1 + \frac{r}{2}\right) S(t),$$

а оскільки відсотки нараховуються кожні пів року, то $t = 0, 1/2, 1, 3/2,$ Легко зрозуміти, що розмір нарощеної суми за t років буде мати такий вигляд:

$$S(t) = S_0\left(1 + \frac{r}{2}\right)^{2t}.$$

В загальному випадку, якщо відсотки нараховуються m разів на рік, то динаміка вкладу буде описуватися рівнянням з кроком $1/m$ та матиме вигляд (1.4):

$$S(t + 1/m) = \left(1 + \frac{r}{m}\right) S(t), \quad (1.4)$$

де $t = 0, 1/m, 2/m, 3/m, \dots$. Нарощена за t років сума представляє собою формулу складних відсотків при m -разовому нарахуванні:

$$S(t) = S_0 \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt}.$$

Припустимо що банк хоче підняти зацікавленість вкладників і пропонує неперервне нарахування відсотків. В такому випадку відсотки будуть додаватися до поточного вкладу в кожен момент часу, що не дасть нам змогу використати різницеве рівняння. Що ж, існує два варіанти як вирішити цю проблему.

По-перше, можна зрозуміти, що неперервне нарахування відсотків створює ситуацію, коли $m \rightarrow \infty$. Це дає нам змогу знайти шукану суму за допомогою граничного переходу в уже відомому нам загальному випадку з m -разовим нарахуванням:

$$S(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} S_0 \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt} = \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \right\} = S_0 e^{rt}.$$

По-друге, ми можемо перейти до границі в різницевого рівнянні (1.4). Для цього позначимо крок дискретизації як $h=1/m$ (тоді $h \rightarrow 0$, при $m \rightarrow \infty$) та перепишемо рівняння (1.4) у вигляді:

$$\frac{S(t + h) - S(t)}{h} = rS(t).$$

При $h \rightarrow 0$ (тобто $m \rightarrow \infty$), ліва частина прямує до похідної dS/dt , в той час як права залишається незмінною, оскільки взагалі не залежить від h . З цього граничного переходу отримуємо рівняння:

$$\frac{dS(t)}{dt} = rS(t),$$

або

$$\dot{S} = rS.$$

Отримане диференціальне рівняння описує динаміку вкладу при неперервному нарахуванні відсотків.

1.3 Способи розв'язання динамічних систем

Для розв'язання задачі (1.1) існує простий спосіб. Також варто відмітити, що серед розв'язків цієї задачі існують такі, що мають особливу роль. Одними з таких виступають розв'язки, що не залежать від зміни t . Вони називаються нерухомими точками. Щоб їх знайти варто розв'язати рівняння $N = f(N)$. З графічної точки зору, нерухомі точки – це точки перетину графіка функції $f(N)$ з бісектрисою першої координатної чверті $N_{t+1} = N_t$, які при цьому мають бути невід'ємними.

Розвиток системи можна визначити таким чином: нехай N_0 – початковий стан системи, тоді $N_1 = f(N_0)$ – точка перетину вертикальної прямої, що виходить з N_0 з графіком функції $f(N)$. Для того, щоб знайти точку на осі абсцис, яка дорівнює за величиною N_1 використаємо пряму $N_{t+1} = N_t$. Отриману точку $(N_1, 0)$ візьмемо в якості нової початкової умови. Аналогічним чином знайдемо $N_2 = f(N_1)$, та наступні точки. Загалом, отримаємо набір

відображень від прямої $N_{t+1} = N_t$. Отриманий графік називається діаграмою чи сходами Ламерея.

На рис. 1.2 та рис. 1.3 можна помітити, що при $t \rightarrow \infty, N_t \rightarrow N^*$, до того ж послідовність точок прямує до положення рівноваги монотонно. Це явище не залежить від того, яку початкову умову N_0 ви візьмете, а це означає, що точка N^* – точка притягання для будь-яких траєкторій.

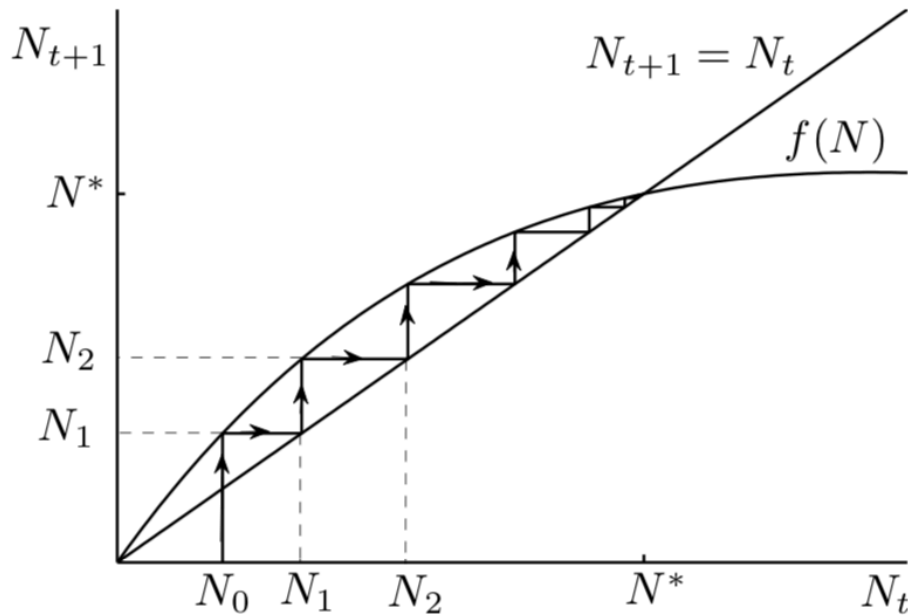


Рисунок 1.2 – Фазова діаграма для випадку монотонно стійкої нерухомої точки N^* для задачі (1.1)

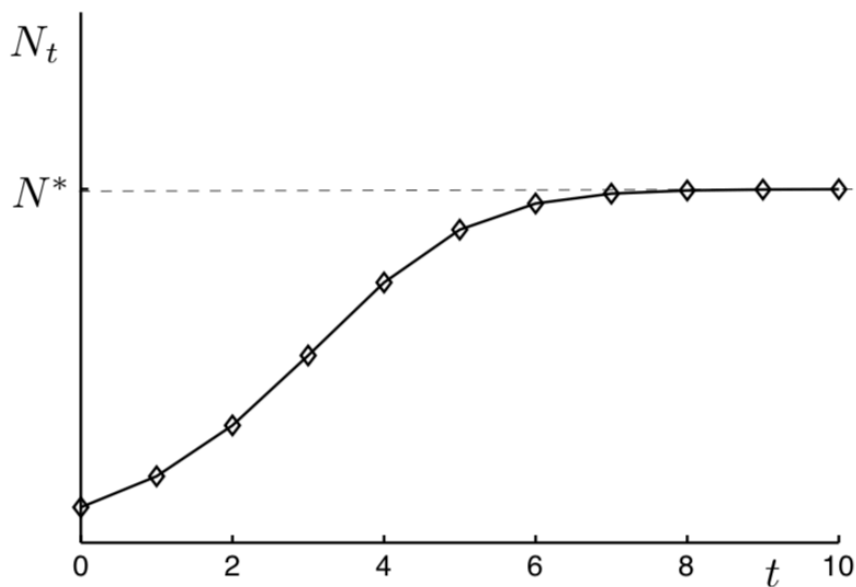


Рисунок 1.3 – Часовий ряд для випадку монотонно стійкої нерухомої точки N^* для задачі (1.1)

Якщо ж функція $f(N)$ має вигляд як на рис. 1.4 або рис. 1.5, то нерухома точка N^* також має властивість притягувати розв'язки до себе, проте збіжність до цієї точки буде не монотонною, а коливальною.

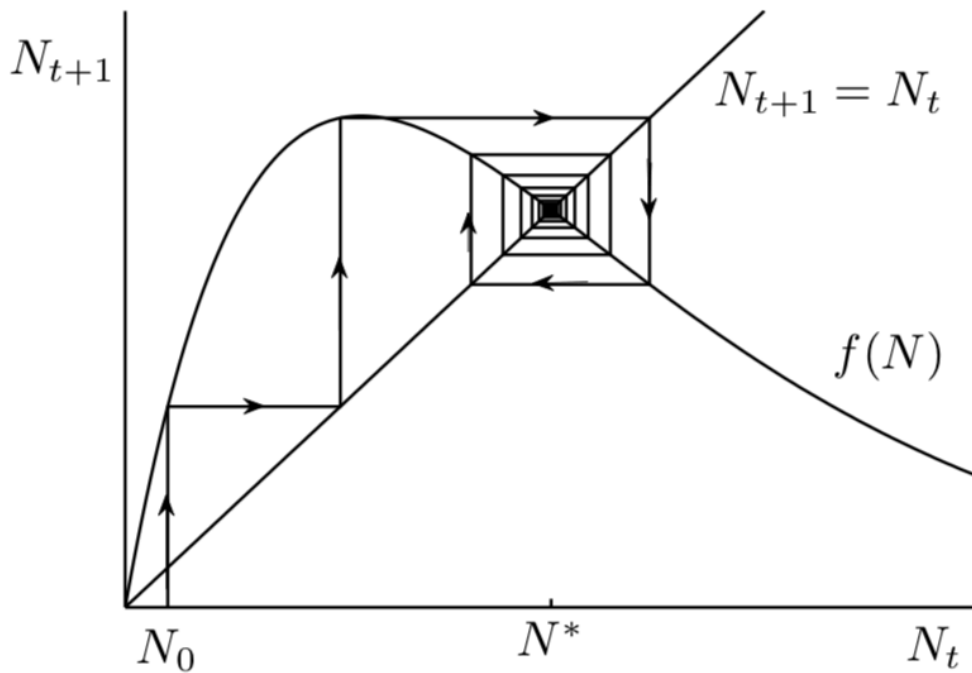


Рисунок 1.4 – Фазова діаграма для випадку осциляторно стійкої нерухомої точки N^* для задачі (1.1)

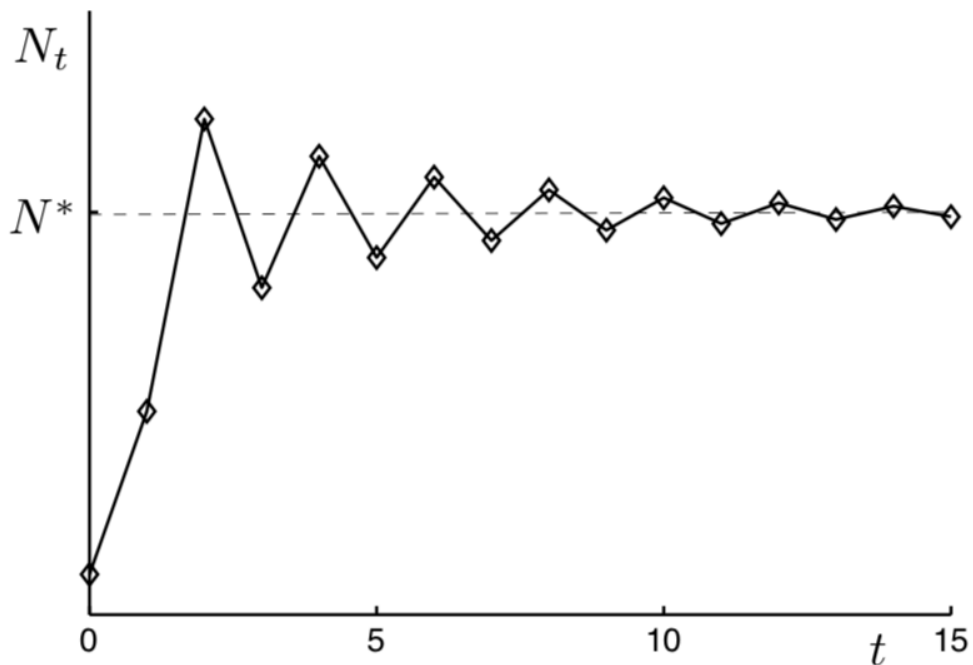


Рисунок 1.5 – Часовий ряд для випадку осциляторно стійкої нерухомої точки N^* для задачі (1.1)

У випадках як на рис. 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, коли різні розв'язки задачі прямують до нерухомої точки, кажуть, що така нерухома точка являється асимптотично стійкою.

За допомогою такого методу розв'язку задачі (1.1) можна з відносною легкістю передбачити велику кількість важливих властивостей одновимірних відображень.

Давайте розглянемо графік на рис. 1.6 функції $f(N)$.

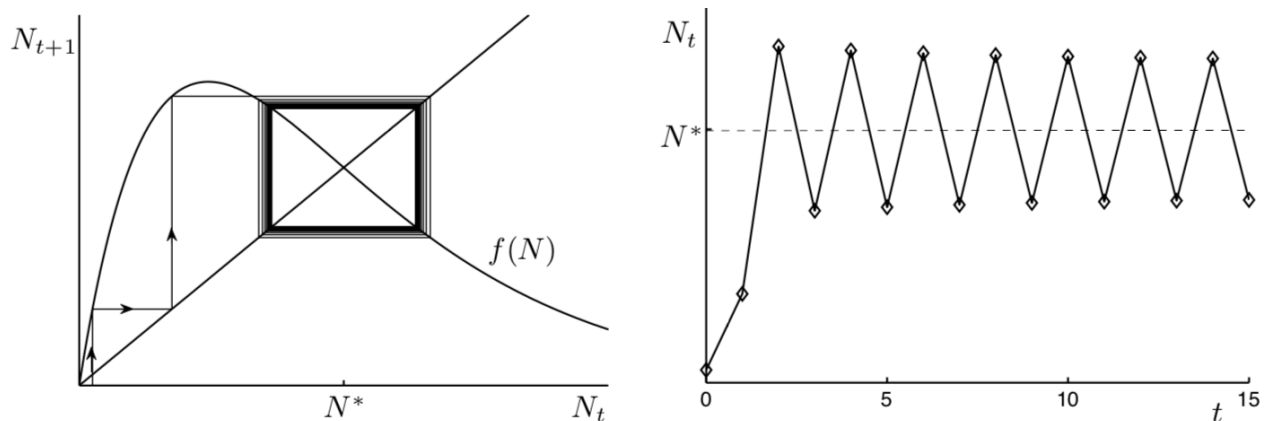


Рисунок 1.6 – Приклад періодичного розв'язку (циклу довжиною два) динамічної системи (1.1) з дискретним часом

З графіку видно, що розв'язки задачі не прямують до положення рівноваги та створюють цикл довжиною два, тобто існують такі розв'язки N_1 та N_2 , що $N_2 = f(N_1)$, а $N_1 = f(N_2)$. Отже для подібних динамічних систем можуть існувати періодичні розв'язки. В такому випадку нерухома точка N^* буде нестійкою, оскільки зі збільшенням t послідовність $\{N_t\}_{t=0}^{\infty}$ покине окіл точки N^* , не залежно від того, яку початкову умову N_0 ви візьмете.

В загальному вигляді періодичні розв'язки динамічних систем вигляду (1.1) можуть мати більші періоди. Також іноді можна спостерігати надзвичайно складну динамічну поведінку розв'язків.

Розглянемо рис. 1.7, на якому зображений графік функції $f(N)$. Можна побачити дві нестійкі нерухомі точки, які знаходяться на початку координат та на перетині графіка $f(N)$ з бісектрисою. Як видно з графіка, послідовність точок $\{N_t\}_{t=0}^{\infty}$ обмежена для будь-якого t . Розв'язок певним чином блукає, а послідовність $\{N_t\}$ виглядає випадковою (якщо розбити множину можливих

значень N нерухомою точкою на два інтервали: $(0, N^*)$ та (N^*, N_{max}) , та відмічати кожне потрапляння траєкторії в ці інтервали нулем чи одиницею відповідно – отримаємо випадкову послідовність, що виглядає так: 00111111010000...). Зазвичай такі розв’язки називають хаотичними.

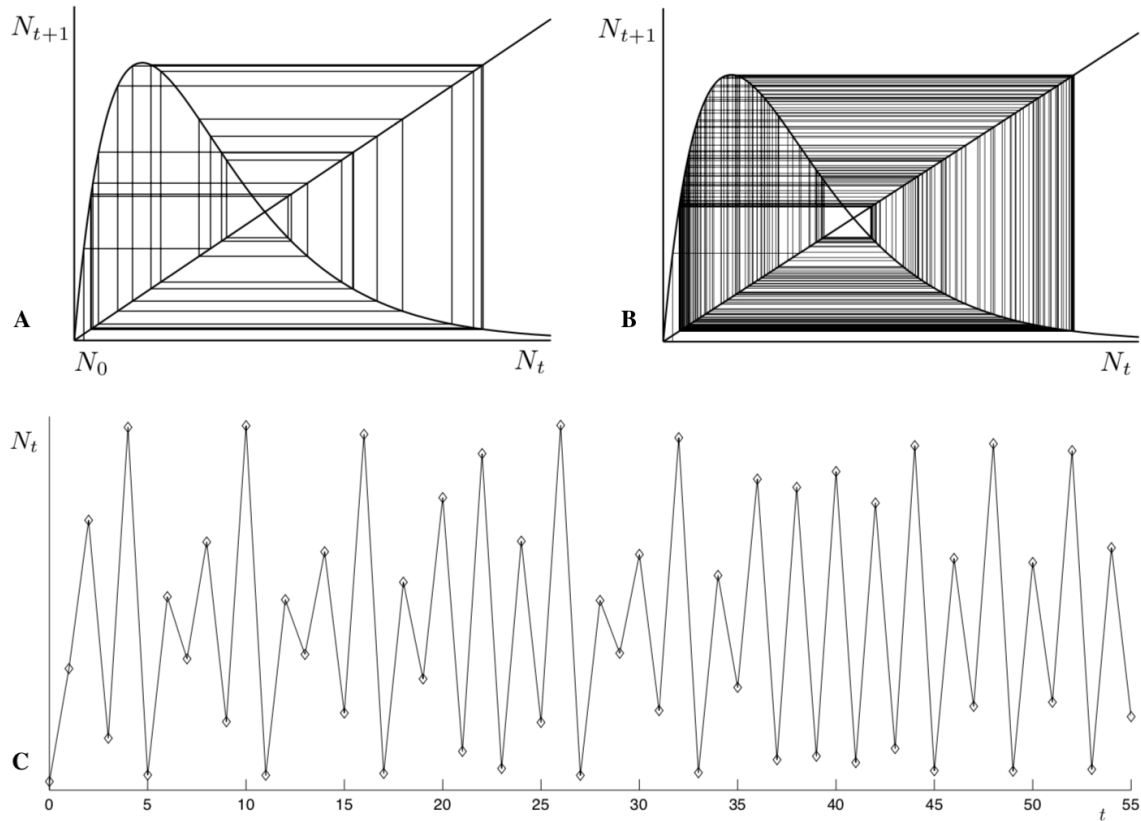


Рисунок 1.7 – Хаотична поведінка розв’язків задачі $N_{t+1} = f(N_t)$. (A) – діаграми Ламерея для невеликих t , (B) – діаграма Ламерея для $t_{max} = 350$. (C) – графік послідовності $\{N_t\}_{t=0}^{\infty}$.

Таким чином ми переконалися, що асимптотичні розв’язки можуть бути різними, оскільки вони включають в себе нерухомі точки (рис. 1.2-1.5), періодичні розв’язки (рис. 1.6) та хаотичну поведінку (рис. 1.7).

1.4 Графічний аналіз відображень

В розглянутих раніше прикладах вважалося що ми точно знаємо з яким відображенням працюємо, оскільки мали формулу. Проте це не завжди так, часом ми маємо лише зображення досліджуваного відображення. Але

незважаючи на це, іноді вдається проаналізувати розвиток відображення та отримати певні нетривіальні висновки.

Приклад 1.4 (Динаміка чисельності жука-шкідника [5]). Нехай динаміка популяції, що ми досліджуємо, можна описати математичною моделлю (1.1), при чому крива $f(N)$ задана лише у вигляді графіка, що зображений на рис. 1.8. За допомогою описаного в пункті 1.3 графічного аналізу можна встановити, що стійкими являються нерухомі точки N_1^* та N_3^* , в той час як N_2^* – нестійка.

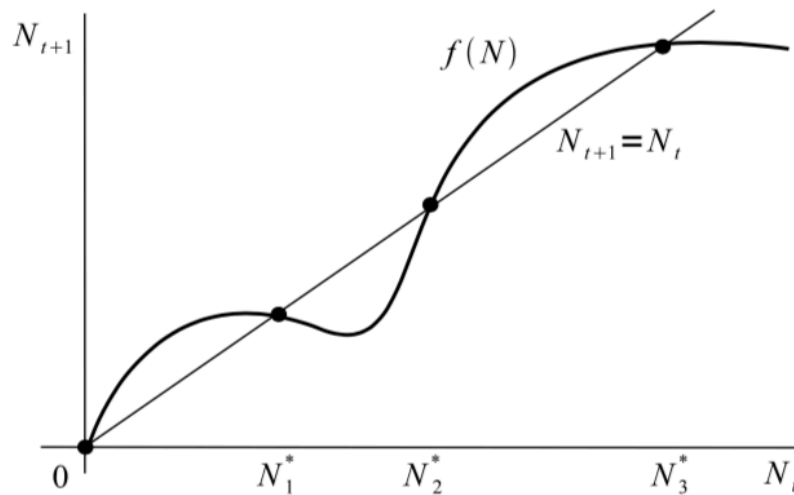


Рисунок 1.8 – Три положення рівноваги функції $f(N)$ в задачі про жука-шкідника

Ділянку графіка $(0, N_1^*)$ можна вважати сприятливою для життя, оскільки будь-яка популяція, що знаходиться в її межах, буде зростати, доки не потрапить в положення стійкої рівноваги N_1^* , де і залишається. Ділянка (N_1^*, N_2^*) несприятлива, оскільки чисельність популяції буде спадати до тих пір, поки не потрапить в точку стійкої рівноваги N_1^* . Ділянка (N_2^*, N_3^*) також є сприятливою і веде в точку стійкої рівноваги N_3^* .

Зображена на рис. 1.8 крива відображає життя популяції жука-шкідника чорного вусача в молодих лісах або на нижніх частинах гірських схилів. Жук атакує лише слабкі або хворі дерева, відкладаючи в них яйця. Рівновага N_1^* відповідає випадку розвитку популяції, коли в лісі постійно наявні слабкі дерева в достатній кількості. Тут присутня екологічна рівновага між комахами та лісом.

Ділянка (N_2^*, N_3^*) відображає життя тієї популяції, що мешкає на схилах гір, де прохолодніше та більш волого. В таких умовах жуки атакують вже і здорові дерева, оскільки щільність популяції зростає. Така ситуація несе загрозу існування самого лісу.

Але для використання жуками цієї ділянки, необхідно щоб чисельність їх популяції досягнула мінімального рівня – точки N_2^* . Проте в звичайних умовах збільшення популяції на ділянці (N_1^*, N_2^*) неможливе, оскільки аттрактором цієї ділянки являється точка N_1^* , в околі якої і буде залишатися популяція. Тож будемо вважати, що комах занесли з інших місць. Тоді чисельність популяції зростатиме, і як тільки досягне точки N_2^* , динаміка розвитку буде описуватись кривою (N_2^*, N_3^*) . При цьому точка N_3^* стає новою точкою стійкої рівноваги, виникає явище, що носить назву «спалах масового розмноження».

Біля вершин не дуже високих гір існують найбільш сприятливі умови для лісу і, як наслідок, для розмноження комах на пізніх етапах розвитку лісу. В таких місцях крива $f(N)$ має вигляд, що відрізняється від кривої, зображеної на рис. 1.8. Вона схожа на попередню, але зі зміщенням вгору, тому нерухомі точки N_1^* та N_2^* зникають, і залишається лише точка рівноваги N_3^* (рис. 1.9). В таких випадках комахи розмножуються без зупину, поки їх чисельність не стане рівною N_3^* , тоді популяційний спалах є неминучим.

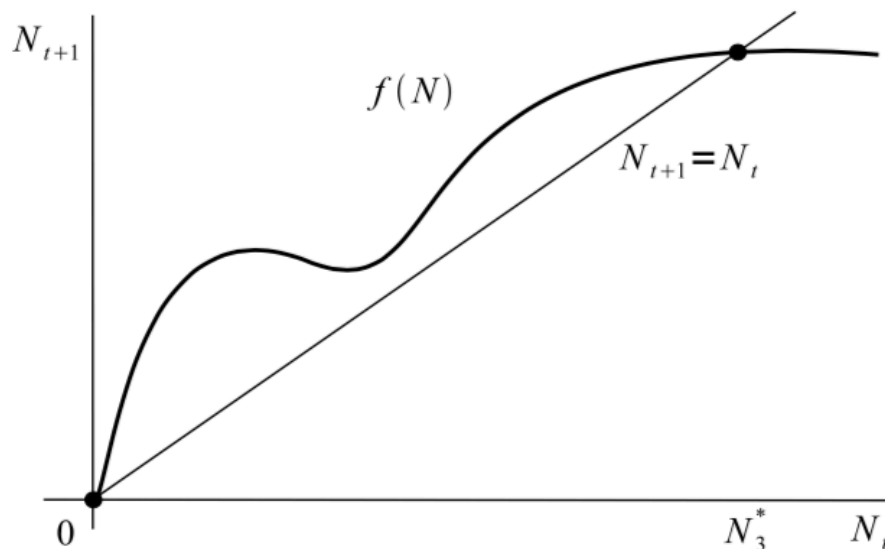


Рисунок 1.9 – Функція $f(N)$ популяції жука-шкідника в «гарному» лісі

Як тільки щільність популяції досягає певного критичного значення – комах починають атакувати «гарний» ліс, доки він не загине. Після чого популяція спускається нижче та запускає динаміку на ділянці (N_2^*, N_3^*) , що притаманна цій області. Тут також починається спалах розмноження і популяція, як лавина, спускається все нижче і нижче. Врешті спалах досягає нижньої зони, еволюція в якій зображена на рис. 1.10, надлишок комах помирає, а спалах завершується. Оскільки жуки не атакують молоді дерева – ліс відновлюється, а коли дерева досягають певного віку – спалах починається знову.

За таким самим сценарієм розвиваються лісові пожежі. З тією лише відмінністю, що після пожеж ліс може зовсім не відновитися і зникнути назавжди [2].

Людина в свою чергу може впливати на цей процес як негативно так і позитивно. Вирубка лісів та їх промислове забруднення може послаблювати дерева і цим самим провокувати спалахи розмноження рослин. Якщо ж людина захоче зменшити ймовірність спалахів або зовсім їх припинити, наприклад за допомогою біологічного винищення шкідників, то крива може набути вигляду як на рис. 1.10.

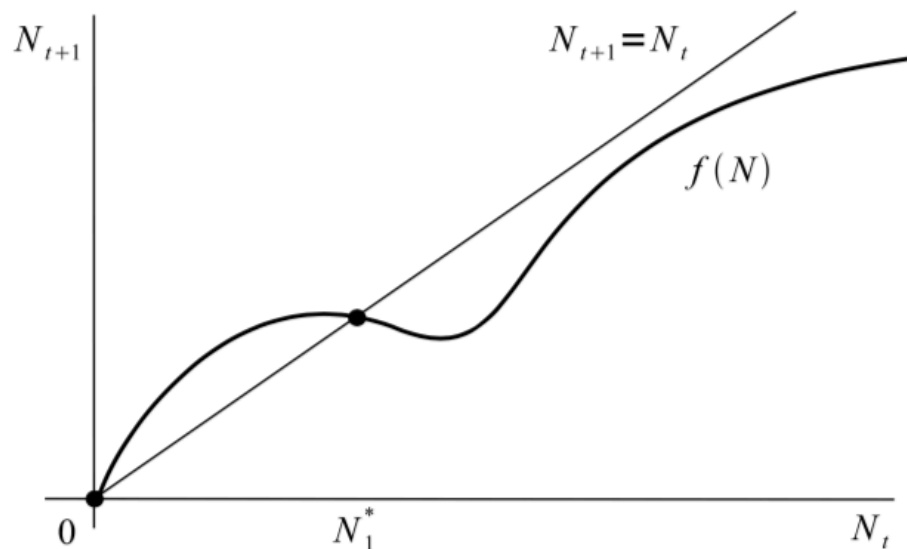


Рисунок 1.10 – Функція $f(N)$ популяції жука-шкідника в нижній зоні лісу

1.5 Нерухомі точки. Стійкість.

Розглянемо відображення (1.5), що визначає дискретну динамічну систему:

$$u \mapsto f(u) = f(u; r), \quad u \in U \subset X, \quad r \in \mathbb{R}, \quad f: U \rightarrow U, \quad (1.5)$$

де множина $X \subset \mathbb{R}^n$. Абсолютно аналогічно з неперервними динамічними системами, ми можемо дати такі визначення. Простором станів (фазовим простором) системи (1.5) називається множина всіх можливих її станів u_t .

Множина точок $u_t, t = 0, 1, \dots$ називається траєкторією системи (1.5), що породжена відображенням f . Такі точки простору станів u^* , що $f(u^*) = u^*$, називаються нерухомими точками. Їх ще можна зустріти під назвами «положення рівноваги» або «стаціонарна точка». Однак перша частіше використовується по відношенню до систем з неперервним часом, а друга – з дискретним.

Визначення стійкості по Ляпунову майже повністю переноситься на системи з дискретним часом. Нерухома точка u^* відображення (1.5) називається стійкою по Ляпунову, якщо:

$$\forall \varepsilon > 0: \exists \delta > 0: \forall u_0 \in (u^* - \delta, u^* + \delta): \{u_t\} \in (u^* - \varepsilon, u^* + \varepsilon), t \in \mathbb{Z}^+.$$

Якщо на додачу до цього маємо $\lim_{t \rightarrow \infty} (u_t) = u^*$, то точка u^* називається асимптотично стійкою. Приклади асимптотично стійких точок представлені на рис. 1.2-1.5. Асимптотично стійкі нерухомі точки називаються атракторами, нестійкі нерухомі точки, в свою чергу, іноді називаються репелерами.

Умови стійких та нестійких нерухомих точок дискретної динамічної системи визначаються значенням модуля похідної функції f в нерухомій точці.

Нехай u^* – нерухома точка відображення (1.5), тобто $u^* = f(u^*)$ і нехай f зворотна в невеликому околі u^* . Тоді якщо $|f'(u^*)| < 1$, то функція асимптотично стійка, і нестійка, якщо $|f'(u^*)| > 1$.

Випадок $|f'(u^*)| = 1$ потребує додаткового аналізу, оскільки є особливим.

Величину $f'(u^*)$ називають власним значенням або мультиплікатором нерухомої точки одновимірної динамічної системи з дискретним часом.

Відзначимо, що стійкі нерухомі точки відображення (1.5) можна класифікувати в залежності від знаку $f'(u^*)$. Якщо $0 < f'(u^*) < 1$, то нерухома точка монотонно стійка (рис. 1.2, 1.3), якщо ж $-1 < f'(u^*) < 0$, то орбіти сходяться до нерухомої точки коливальним чином (рис. 1.4, 1.5).

Приклад 1.5 (Дискретне логістичне рівняння). Розглянемо таке логістичне рівняння:

$$N_{t+1} = rN_t(1 - \frac{N_t}{K}).$$

Параметр r являється єдиним, що впливає на поведінку траєкторій даного рівняння. Якщо замінити $N_t = Ku_t$ рівняння приведеється до вигляду (1.6):

$$u_{t+1} = ru_t(1 - u_t), \quad r > 0, \quad 0 \leq u_t \leq 1. \quad (1.6)$$

Очевидно, що нерухомими точками відображення (1.6) будуть точки: $u_1^* = 0, u_2^* = (r - 1)r$. Друга нерухома точка існує лише коли $r > 1$, оскільки нас цікавлять лише невід'ємні розв'язки. Маємо $f'(u) = r - 2ru, f'(u_1^*) = r$, а отже точка u_1^* асимптотично стійка за умови, що $0 < r < 1$, і нестійка, коли $r > 1$. Якщо $r = 1$, то $f'(u^*) = 1$. Нехай $r > 1$, тоді існує друга нерухома точка, мультиплікатор якої $f'(u_2^*) = 2 - r$. Отже, точка u_2^* стійка, тільки якщо $1 < r < 3$, і нестійка, коли $r > 3$. Якщо $r = 3$, то $f'(u_2^*) = -1$.

1.6 Цикли динамічних систем. Траєкторії.

Простий графічний аналіз доводить, що іноді одновимірні дискретні динамічні системи можуть мати досить складну поведінку, навіть якщо на перший погляд вони виглядають простими. Це стосується, наприклад, динамічних систем з дискретним часом, розв'язками яких є цикли.

Множина точок $\{u_i\}, i = \overline{1, k}$ таких, що

$$u_2 = f(u_1), \dots, u_k = f(u_{k-1}), u_1 = f(u_k),$$

називається циклом довжини k дискретної динамічної системи

$$u_{t+1} = f(u_t), \quad u_t \in \mathbb{R}.$$

З визначення слідує, що кожна з точок $u_i, i = \overline{1, k}$, являється нерухомою точкою k -ї ітерації відображення

$$f^k(u) = f(f(f(u))) = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_k.$$

І справді, для точки u_1 циклу довжини k маємо

$$u_1 = f(u_k) = f^2(u_{k-1}) = f^3(u_{k-2}) = \dots = f^k(u_1).$$

Аналогічним чином можна довести, що всі інші точки циклу являються нерухомими точками відображення f^k . Отже якщо довести стійкість нерухомих точок відображення f^k , які складають цикл довжини k то можна сказати що і весь цикл буде стійким.

Давайте доведемо, що величина власного значення, що описує стійкий цикл, не залежить від вибору нерухомої точки. Для цього нам знадобиться

$$\begin{aligned}\mu_i &= \frac{df^k(u_i)}{du} = \frac{df(f^{k-1}(u_i))}{du} = f'(u_{i-1}) \frac{df^{k-1}(u_i)}{du} = \dots = \\ &= f'(u_{i-1})f'(u_{i-2})f'(u_i),\end{aligned}$$

оскільки $f^{k-1}(u_i) = u_{i-1}$. З цього можна сказати, що цикл довжини k є стійким, якщо $|f'(u_1) \dots f'(u_k)| < 1$. В протилежному випадку – нестійким.

Варто зазначити, що нерухомі точки відображення f також являються нерухомими точками відображення f^k . Це легко довести, оскільки $f(u^*) = u^*$, то $f^2(u^*) = f(f(u^*)) = f(u^*) = u^*$ і так далі.

Відображення не може мати цикли, в тому випадку, коли f – гладка монотонно зростаюча функція. Щоб довести це припустимо, що таке відображення f має цикл довжини два. Це означає, що існують такі u_1 та $u_2, u_1 \neq u_2$, що $f(u_1) = u_2, f(u_2) = u_1$. При цьому, якщо $u_2 > u_1$, то з монотонності випливає, що $f(u_2) = u_1 > f(u_1) = u_2$, що суперечить припущенню. Однак якщо f – гладка монотонно спадаюча функція, то ситуація коли u_1 та $u_2, u_1 \neq u_2$, що $f(u_1) = u_2, f(u_2) = u_1$, і такі функцію можуть мати періодичні розв'язки.

Нехай $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ неперервне відображення, і нехай f має цикл довжини k . Тоді f має цикл довжиною m для всіх таких m , що $k \succ m$ [6].

З цієї теореми випливає, що якщо відображення не має циклів довжиною два, то воно взагалі не має циклів. Якщо ж відображення має цикл довжиною три, то воно має цикли всіх можливих довжин. Лі та Йорк незалежно отримали більш загальний результат, який був опублікований в їх роботі, «період три породжує хаос» [7]. Основний результат наступний: розглянемо неперервне відображення дійсної осі в саму себе, яке має цикл довжиною три, тоді існують цикли довжин n для всіх $n \in \mathbb{N}$ та існує незлічена множина неперіодичних траєкторій.

Приклад 1.6 Розглянемо відображення Рікера (1.7):

$$u_{t+1} = ru_t e^{-u_t}, \quad (1.7)$$

в якому u_t – безрозмірна щільність популяції в момент часу t , $r > 0$ – коефіцієнт росту.

Негативна роль конкуренції всередині популяції на динаміку росту при високій щільності популяції відображена правою частиною рівняння (1.7). Система (1.7) має нерухому точку $u_1^* = 0$ при будь-яких значеннях параметра r . А у випадку, коли $r > 1$ з'являється ще одна, нетривіальна, нерухома точка $u_2^* = \ln r$.

Власне значення відображення (1.7) задається так: $\mu = 1 - \ln r$. Таким чином точка u_2^* стійка, коли $1 < r < r_1$, і не стійка, коли $r > r_1$, де $r_1 = e^2$. При цьому r також може дорівнювати r_1 , тоді $\mu = -1$ і виникає стійкий цикл довжини 2.

Розвиток цього циклу можна спостерігати і надалі. При $r_2 \approx 12.51$ цикл перестає бути стійким і з'являється стійкий цикл, але з довжиною 4. Наступна біфуркація відбувається коли $r_4 \approx 14.24$, тоді з'являється стійкий цикл довжини 8 і так далі. Це явище було виявлено Фейгенбаумом, і отримало назву «каскад подвоєння періоду».

Якщо в системі спостерігається це явище, то інтервали між наступними біфуркаційними значеннями швидко зменшуються, а самі значення прямують до r_∞ , яке є граничним значенням [8, 9]. Якщо $r > r_\infty$, то траєкторії динамічної системи називають хаотичними, а каскад подвоєння періоду – сценарієм переходу к хаосу за Фейгенбаумом.

Існування періодичних траєкторій любого періоду доводиться таким чином: якщо для деякого u_t , та довільної $f(u_t)$ існує таке непарне число n , для якого справедливо, що

$$f^n(u_t) < u_t < f(u_t),$$

то існують цикли непарної довжини, а це і означає, що існують періодичні траєкторії довільного періоду.

1.7 Числа Ляпунова

Розглянемо гладке відображення:

$$u_{t+1} = f(u_t).$$

Нехай u_1 та \bar{u}_1 – дві досить близькі точки цього відображення. Ці дві точки породжують орбіти, давайте розглянемо їх:

$$u_1, u_2, u_3, \dots, u_k, \dots; \quad \bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_k, \dots$$

Виникає питання, як ми можемо визначити відстань між двома орбітами? Звичайно може існувати безліч варіантів поведінки орбіт, які були випущені з однієї точки. Вони можуть сходитись до однієї точки, або розходитись, а також ці два випадки можуть виникати по черзі. Крім того параметри системи можуть сильно впливати на поведінку близьких орбіт. В логістичному рівнянні, коли параметр r лежить в межах від 0 до 1 – всі орбіти сходяться до точки $u_1^* = 0$, проте якщо $r > 1 + \sqrt{6}$ – орбіти, що породжені близькими початковими умовами не обов'язково будуть близькими.

Спочатку давайте дізнаємось наскільки точки u_2 та \bar{u}_2 близькі одна до одної. Для цього треба побудувати їх різницю:

$$u_2 - \bar{u}_2 = f(u_1) - f(\bar{u}_1) = f'(u_1)(u_1 - \bar{u}_1) + o(|u_1 - \bar{u}_1|).$$

Відстань між точками u_2 та \bar{u}_2 в лінійному наближенні буде меншою, ніж відстань між початковими точками u_1 та \bar{u}_1 , якщо $|f'(u_1)| < 1$. Інакше – відстань стане більшою в порівнянні з початковою відстанню між початковими

точками. Таким чином на будь-якому кроці можна сказати, що відстань між точками u_k та \bar{u}_k буде зменшуватися, якщо $|f'(u_{k-1})| < 1$, та збільшуватися в протилежному випадку. Величина похідної функції $f(u)$ в точці u_t може приймати значення як більші від одиниці, так і менші, в залежності від t , то задля того, щоб дізнатися міру близькості орбіт – беруть величину, яка є середньою для всіх точок u_t , вона називається числом або показником Ляпунова.

Нехай $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – гладке відображення.

Числом Ляпунова траєкторії $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ називається величина

$$l(u_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} (|f'(u_1)| \cdot |f'(u_2)| \cdot \dots \cdot |f'(u_n)|)^{\frac{1}{n}},$$

якщо така границя існує.

Показником Ляпунова траєкторії $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ називається величина

$$h(u_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln|f'(u_1)| + \ln|f'(u_2)| + \dots + \ln|f'(u_n)|}{n},$$

якщо така границя існує.

Наведемо приклади того, як число або показник Ляпунова характеризує поведінку близьких траєкторій при зміні дискретної величини t . Якщо число Ляпунова дорівнює двом для траєкторії, що починається в точці u_1 , означає, що відстань між точками траєкторії, породженої точкою u_1 , та траєкторією, що породжена будь-якою точкою u з околу u_1 , буде збільшуватися в середньому вдвічі після кожної ітерації. Якщо ж число Ляпунова менше одиниці, то такі траєкторії будуть зближуватися після кожної ітерації, та врешті решт стануть нескінченно близькими. Значення $h(u_1)$ не залежить від того, яке початкове значення брати, але тільки тоді, коли існує така стійка замкнута підмножина простору станів, до якої прямують траєкторії з довільних початкових точок [10].

Із визначення числа Ляпунова витікає той факт, що воно дорівнює нулю коли існує така траєкторія u_i , що $f'(u_1) = 0$. В такому випадку показник Ляпунова буде невизначеним, проте можна вважати що він дорівнює $-\infty$. Якщо l – число Ляпунова для відображення f для траєкторії з точки u_1 , то з правил диференціювання витікає, що для траєкторії тієї ж точки відображення f^m число Ляпунова буде дорівнювати l^m .

Показник Ляпунова є характерною ознакою хаотичної поведінки, яку легко обчислити. Тобто якщо $h(u)$ додатній, то близькі траєкторії будуть розбіжними, а в системі буде спостерігатися хаотична поведінка.

Хаотичною ми називаємо орбіту $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ дискретної системи $u_{t+1} = f(u_t)$, якщо вона не обмежена, не прямує до періодичної траєкторії, а її число Ляпунова $l(u_1)$ строго більше одиниці, або ж показник Ляпунова $h(u_1)$ більше нуля.

Зазвичай характер залежності між показником Ляпунова та параметром відображення являється досить складним. На рис. 1.11 можна спостерігати приклад такої залежності. Вона отримана з логістичного рівняння в якому $n = 10^4$ для кожної з 1000 точок, що рівномірно розміщені за параметром r , та належать траєкторії з початковим значенням $u_0 = 2/5$.

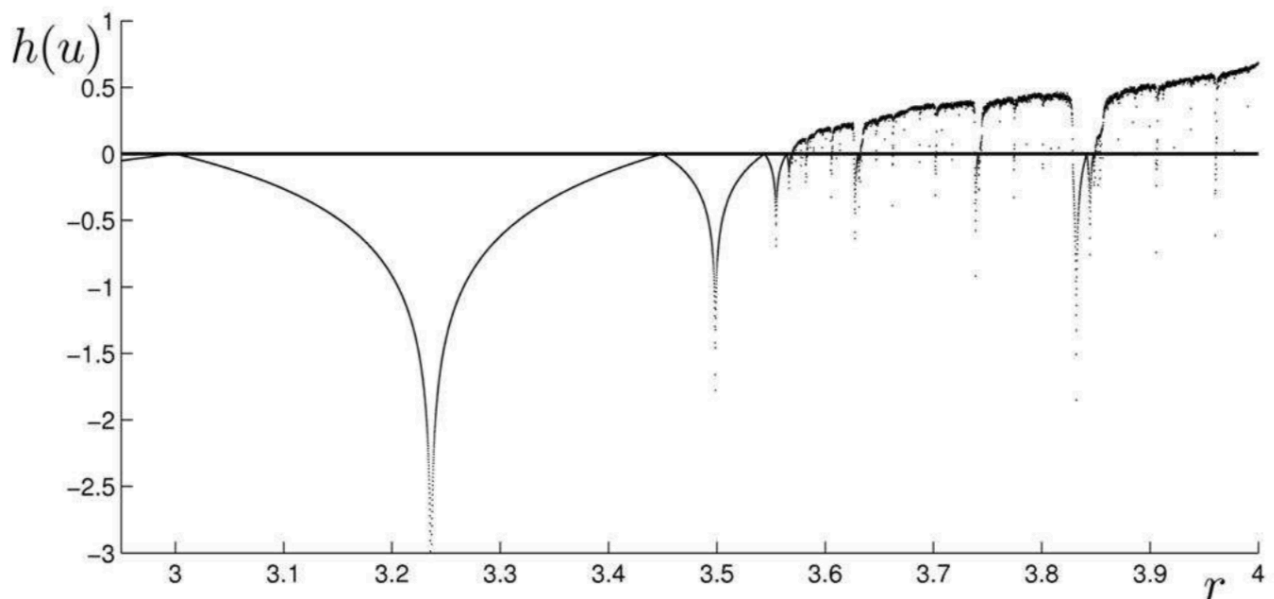


Рисунок 1.11 – Залежність показника Ляпунова від параметра r для логістичного рівняння

Гарно видно, що періодичним рухам з маленьким періодом відповідають досить широкі інтервали по r , де $h(u) < 0$. Руху з великим періодом відповідають інтервали по r , які менші ніж відстань між точками графіку, через це їх непомітно.

1.8 Інші приклади динамічних систем

Приклад 1.7 Модель гіперінфляції Кейгана. Ця модель описує процес гіперінфляції під впливом інфляційних очікувань економічних агентів, була запропонована Ф. Кейганом в 1956 році.

Сама модель складається з двох рівнянь:

- функція попиту на гроші:

$$\frac{M_d}{P} = e^{-\alpha\pi},$$

де P – фактичний рівень цін, π – очікуваний темп інфляції, α – еластичність попиту на гроші;

- диференціальне рівняння адаптації інфляційних очікувань:

$$\pi' = \beta \left(\frac{P'}{P} - \pi \right),$$

де $\beta > 0$ – параметр адаптації, а $\frac{P'}{P}$ – фактичний темп інфляції. Таким чином, в моделі Кейгана сектор економіки, процентові ставки мають другорядний вплив, а очікуваний темп інфляції підвищується тоді, коли фактичний темп перевищує очікуваний (тоді маємо що $\pi' > 0$), і спадає в іншому випадку.

Таку модель зручно зображати в логарифмічних змінних

$$m_d = \ln M_d,$$

$$p = \ln P.$$

Тоді рівняння моделі матимуть такий вигляд:

$$\begin{aligned} m_d - p &= -\alpha\pi, \\ \pi' &= \beta(p' - \pi), \end{aligned}$$

перше з них буде скінченним, а друге – диференціальним.

При $M_d = \text{const}$ (тоді і $m_d = \text{const}$) можна виключити p шляхом диференціювання кінцевого рівняння по t . Отримаємо рівняння $p' = \alpha\pi'$, і, після підстановки його в друге рівняння, отримаємо звичайне лінійне рівняння

$$\pi' = \gamma\pi,$$

де

$$\gamma = \frac{\beta}{\alpha\beta - 1}.$$

Його розв'язок з початковою умовою $\pi(0) = \pi_0$ виражається через експоненту:

$$\pi(t) = \pi_0 e^{\gamma t},$$

а отже інфляційні очікування знижуються, коли $\gamma < 0$, тобто при $\alpha\beta < 1$ (тоді $\pi(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$).

Приклад 1.8 Логістичне рівняння та ефективність реклами. Нехай y – доля населення певної географічної одиниці, яке було інформоване про товар якогось виробника за допомогою реклами. Приріст цієї частини населення залежить від того, наскільки інтенсивно йде обмін інформацією всередині цієї частини населення та з тими, хто ще не був інформованим $(1-y)$. Таку умову можна формалізувати за допомогою рівняння

$$y' = ay(1 - y)$$

в неперервному часі, та рівнянням

$$y(t + 1) = y(t) + ay(t)(1 - y(t))$$

в дискретному. В даному випадку параметр $a > 0$ характеризує інтенсивність обміну інформацією, і як приклад може залежати від витрат компанії на рекламу. Також дані рівняння можна модифікувати, ввівши в них параметр c , який буде характеризувати рівень «забуття» потенційних покупців про рекламу товару (-су, де $c > 0$).

1.9 Висновки за розділом 1

В першому розділі ми розглянули загальну теорію нелінійних динамічних систем, зокрема дискретних. Описали способи розв'язання та графічний метод їх якісного аналізу, який можна використовувати коли поведінка системи складна або відсутня формула відображення з яким ми працюємо.

Ознайомилися з поняттями нерухомої точки та її стійкості, циклу та траєкторії динамічної системи, а також привели визначення числа Ляпунова та його значення в процесі аналізу траєкторій системи.

Всі ці елементи необхідні для проведення якісного аналізу будь-якої нелінійної динамічної системи.

РОЗДІЛ 2 МОДЕЛЬ РОСТУ СОЛОУ

Економічне зростання та розвиток являються динамічними процесами, і тому для їх вивчення потрібні динамічні моделі. Модель Солоу, не зважаючи на свою простоту, являється динамічною моделлю загальної рівноваги.

Побудувати модель Солоу можна як в дискретному, так і в неперервному часі. Ми розглянемо модель в дискретному часі, оскільки вона більш проста та використовується в багатьох макроекономічних процесах.

2.1 Структура економіки в базовій моделі Солоу

Розглянемо закриту економіку з єдиним кінцевим товаром. Періодом можна вважати день, тиждень або рік, що в даному випадку не так важливо. Нехай економіка має велику кількість домогосподарств (споживачів). Модель Солоу дає змогу зробити невелику кількість припущень щодо поведінки цих домогосподарств, оскільки в ній явно не описується їх оптимізаційна. Модель припускає, що всі домогосподарства в економіці ідентичні. Отже, попит на товари та пропозицію щодо праці можна розглядати як поведінку лише одного господарства.

Модель не потребує великої кількості інформації про господарства. Ми не будемо наділяти їх функцією корисності. Замість цього ми припустимо, що господарства зберігають екзогенно фіксовану долю свого прибутку $s \in (0, 1)$ незалежно від подій, що відбуваються в економіці.

Іншим важливим типом агентів в економіці являються фірми, що виробляють кінцевий товар. В реальному житті фірми, звичайно, відрізняються одна від одної, як і споживачі, але для спрощення ми будемо вважати, що всі вони мають доступ до однакової технології виробництва кінцевого продукту.

Зобразимо виробничу функцію єдиного кінцевого товару (2.1):

$$Y(t) = F(K(t), L(t), A(t)), \quad (2.1)$$

де $Y(t)$ – загальна кількість виробленого товару за період t , $K(t)$ – кількість капіталу, $L(t)$ – загальна зайнятість, $A(t)$ – рівень технологій в момент t . Зайнятість можна розраховувати по різному, наприклад як загальну кількість людино-годин праці, або як загальну кількість робітників. Капіталом будемо вважати загальну кількість устаткування та потужностей, що використовуються під час виробництва. Задля спрощення ми також будемо вважати, що весь капітал в економіці однорідний.

Технології, в свою чергу, не можна виміряти наявними одиницями. Тому технології $A(t)$ будуть для нас змінною, що зміщує виробничу функцію (2.1).

Важливим припущенням моделі росту Солоу являється те, що технології вважаються безкоштовними. Вони вважаються неконкуретним та доступним кожному суспільним благом. Тобто після того, як технологія з'явилась у певної компанії – вона може безперешкодно з'явитися в усіх інших. Наслідком такого припущення являється можливість використання $A(t)$ всіма фірмами безкоштовно.

Припущення 1 (щодо неперервності, диференційованості, позитивного та регресного граничного продукту та сталості віддачі від масштабу). Виробнича функція $F: \mathbb{R}_+^3 \rightarrow \mathbb{R}_+$ являється двічі диференційованою за K і L , та задовольняє наступним умовам:

$$F'_K(K, L, A) \equiv \frac{\partial F(K, L, A)}{\partial K} > 0, F'_L(K, L, A) \equiv \frac{\partial F(K, L, A)}{\partial L} > 0,$$

$$F''_K(K, L, A) \equiv \frac{\partial^2 F(K, L, A)}{\partial K^2} < 0, F''_L(K, L, A) \equiv \frac{\partial^2 F(K, L, A)}{\partial L^2} < 0.$$

Також функція F має властивість постійної віддачі від масштабу за змінними K і L , якщо вона являється лінійно однорідною за цими змінними:

Нехай $k \in \mathbb{N}$. Функція $g: \mathbb{R}^{k+2} \rightarrow \mathbb{R}$ називається однорідною степені m по $x \in \mathbb{R}$ та $y \in \mathbb{R}$ якщо

$$g(\lambda x, \lambda y, z) = \lambda^m g(x, y, z) \text{ для всіх } \lambda \in \mathbb{R}_+ \text{ та } z \in \mathbb{R}^k.$$

З припущення щодо лінійної однорідності також витікає властивість увігнутості (нестрогої).

Постійна залежність віддачі від масштабу являється ще одним важливим припущенням. Вважатимемо, що функція F має властивість постійної залежності віддачі від масштабу за змінні K та L , якщо вона є лінійно однорідною (першої степені) за цими змінними:

Нехай $K \in \mathbb{N}$. Функція $g: \mathbb{R}^{K+2} \rightarrow \mathbb{R}$ називається лінійно однорідною степені m по $x \in \mathbb{R}$, та $y \in \mathbb{R}$ якщо

$$g(\lambda x, \lambda y, z) = \lambda^m g(x, y, z) \text{ для всіх } \lambda \in \mathbb{R}_+ \text{ та } z \in \mathbb{R}^K.$$

Теорема Ейлера. Нехай функція $g: \mathbb{R}^{K+2} \rightarrow \mathbb{R}$ диференційована по $x \in \mathbb{R}$, та $y \in \mathbb{R}$ та являється однорідною степені m по $x \in \mathbb{R}$, та $y \in \mathbb{R}$.

Позначимо часткові похідні g як g_x та g_y . Тоді

$$mg(x, y, z) = g_x(x, y, z)x + g_y(x, y, z)y$$

для всіх $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{R}^K$.

Більш того, $g_x(x, y, z)$ та $g_y(x, y, z)$ також являються однорідними степені $m - 1$ по $x \in \mathbb{R}$, та $y \in \mathbb{R}$.

Перш ніж почати опис торгівлі на конкурентному ринку, необхідно визначити права власності на всі запаси в економіці. Оскільки припущення щодо конкуренції має сенс лише в тому випадку, коли в економіці присутня приватна власність що розповсюджується на активи та засоби виробництва, можемо припустити, що фактори виробництва належать господарствам. Припустимо, що господарства володіють всіма трудовими ресурсами, а їх пропозиція абсолютно нееластична. Тобто запаси праці в економіці $\bar{L}(t)$, що наприклад дорівнюють населенню країни, і всі вони будуть використані, незалежно від їх орендної вартості, якщо вона невід'ємна.

Рівновагу на ринку праці можна описати у вигляді рівняння (2.2):

$$L(t) = \bar{L}(t) \quad (2.2)$$

для всіх t , де $L(t)$ відображає попит на працю (та одночасно кількість зайнятих в економіці). Також до рівняння (2.2) варто додати умову нежорсткості (2.3):

$$L(t) \leq \bar{L}(t), w(t) \geq 0 \text{ і } (L(t) - \bar{L}(t))w(t) = 0, \quad (2.3)$$

де $w(t)$ – орендна вартість праці або заробітна платня в момент часу t .

Умова нежорсткості гарантує, що під час рівноваги на ринку праці заробітна платня буде невід’ємною. Якщо ж попиту на працю буде недостатньо, зайнятість може стати меншою ніж $\bar{L}(t)$, при нульовій платні. Однак в нашому випадку краще використовувати більш просте формулювання рівноваги на ринку праці та позначити попит та пропозицію праці в момент t змінною $L(t)$.

Господарства також мають в своєму розпорядженні капітал та здають його в оренду фірмам. Позначимо орендну вартість капіталу змінною $R(t)$. Умова рівноваги на ринку капіталу виглядатиме так:

$$K(t) = \bar{K}(t),$$

де $\bar{K}(t)$ – пропозиція капіталу господарствами, а $K(t)$ – попит на нього з боку фірм.

Тепер давайте розглянемо амортизацію капіталу. Будемо вважати, що машини, які використовуються в виробництві, схильні до зношування и тому втрачають частину своєї вартості. Припустимо, що амортизація відбувається експоненційно, що значно полегшить побудову моделі. Вважатимемо, що капітал вибуває експоненційно з темпом $\delta \in (0, 1)$, тобто від одиниці капіталу в даний період залишається лише $1 - \delta$ в наступний. Не зважаючи на те, що ми

розглядаємо амортизацію як процес зношування обладнання, в більш складних моделях її можна розглядати як процес заміни старого обладнання на нове.

Втрата частини капіталу в результаті амортизації впливає на відсоткову ставку (прибутковість заощаджень), яка доступна господарствам. Із припущення щодо експоненційного характеру амортизації та нормалізації ціни кінцевого товару одиницею витікає, що відсоткова ставка, яка доступна господарствам, дорівнює

$$r(t) = R(t) - \delta,$$

де $R(t)$ – орендна вартість капіталу в період t . Одиниця кінцевого товару може бути використаною для споживання в даний момент часу або віддана як капітал в оренду фірмам. В останньому випадку господарство отримує прибуток $R(t)$ на свої заощадження в розмірі орендної вартості капіталу в момент t , але втрачає δ одиниць капіталу, оскільки його частина δ зношується протягом періоду. Таким чином, господарство відмовилось від одиниці споживання кінцевого товару в періоді $t - 1$ і отримало $1 + r(t) = R(t) + 1 - \delta$ одиниць кінцевого товару в періоді t , тобто $r(t) = R(t) - \delta$. Ця залежність між змінними $r(t)$ та $R(t)$ пояснює вибір позначень для відсоткової ставки та орендної вартості капіталу.

При заданих раніше значеннях технології $A(t)$ та цін факторів виробництва $R(t)$ та $w(t)$ задача максимізації прибутку репрезентативною фірмою в момент часу t може бути представлена в наступному статичному вигляді (2.4):

$$\max_{K \geq 0, L \geq 0} F(K, L, A(t)) - R(t)K - w(t)L. \quad (2.4)$$

У випадку, коли наявні незворотні інвестиції або зміни кількості капіталу оптимізаційна задача фірми стає динамічною. Проте при їх відсутності

максимізація прибутку фірмою в кожен момент часу t еквівалентна максимізації чистої поточної вартості сукупного прибутку фірми.

Варто відзначити ряд додаткових деталей, пов'язаних з задачею максимізації прибутку:

- задача максимізації поставлена в термінах агрегованих змінних, однак це не обмежує загальності аналізу, враховуючи припущення щодо наявності репрезентативної фірми;
- перед доданком F в (2.4) відсутній коефіцієнт. Це пов'язано з нормалізацією ціни кінцевого товару одиницею. Більш того, перший доданок – це виторг репрезентативної фірми (або всіх фірм в економіці);
- спосіб постановки задачі уже передбачає конкурентну пропозицію на ринку, оскільки фірми розглядають орендну вартість праці та капіталу ($w(t)$ та $R(t)$) як задані;
- оскільки функція F увігнута, вся задача також являється увігнутою.

В силу припущення щодо постійної залежності віддачі від масштабу, задача максимізації не має єдиного внутрішнього розв'язку (максимальний прибуток може дорівнювати нескінченності, тоді розв'язок задачі відсутній, або $K = L = 0$, або максимум, що дорівнює 0, досягається на нескінченній кількості пар (K, L)). Такий висновок пов'язаний з тим, що при постійній залежності віддачі від масштабу оптимальний розмір фірм не визначений. Щоб обрати єдиний розв'язок необхідно додати умови, що ринки факторів виробництва мають перебувати в стані рівноваги. Іншими словами, з будь-який момент часу попит на працю та капітал має дорівнювати їх пропозиції. З цього витікає, що репрезентативна фірма отримує нульовий прибуток, оскільки інакше її попит на працю та капітал був би нескінченно великим та перевершив би їх пропозицію, яка обмежена скінченною величиною. З припущення також витікає, що сукупний попит на працю L та капітал K мають дорівнювати наявній пропозиції праці $L(t)$ та капіталу $K(t)$. Інакше, у випадку $L < L(t)$, в економіці існувала би надлишкова пропозиція праці і заробітна плата стала би нульовою. Проте це не узгоджується з максимізацією прибутку, оскільки в такому випадку фірма

бажала би наймати необмежену кількість праці, що перевершило би його пропозицію. З цього аргументу та припущення щодо диференційованості F також випливає, що при заданій пропозиції праці $L(t)$ та капіталу $K(t)$ в момент часу t ціна факторів виробництва (2.5), (2.6) має задовольняти стандартним умовам та дорівнювати відповідному граничному продукту:

$$w(t) = F_L(K(t), L(t), A(t)), \quad (2.5)$$

$$R(t) = F_K(K(t), L(t), A(t)). \quad (2.6)$$

З теореми Ейлера випливає, що при таких цінах на фактори виробництва прибуток фірми (або репрезентативної фірми) дорівнює нулю.

Нехай припущення 1 виконано. Тоді на траєкторії рівноваги моделі росту Солоу фірми отримують нульовий прибуток, а також:

$$Y(t) = w(t)L(t) + R(t)K(t).$$

На додачу до стандартних припущень щодо вигляду виробничої функції, часто припускається, що наступні граничні умови (умови Інади) являються виконаними при аналізі макроекономічної рівноваги в молях росту.

Припущення 2 (умови Інади).

Функція F задовольняє умовам Інади, якщо

$$\lim_{K \rightarrow 0} F_K(K, L, A) = \infty$$

та

$$\lim_{K \rightarrow \infty} F_K(K, L, A) = 0$$

для всіх $K > 0$ і для всіх A ,

$$\lim_{L \rightarrow 0} F_L(K, L, A) = \infty$$

та

$$\lim_{L \rightarrow \infty} F_L(K, L, A) = 0$$

для всіх $K > 0$ і для всіх A .

Більш того, $F(0, L, A) = 0$ для всіх L та A .

З цих умов випливає, що перші використані праця та капітал являються дуже високопродуктивними і що їх граничний продукт прямує до нуля, коли їх кількість стає відносно надлишковою. Умова $F(0, L, A) = 0$ для всіх L та A робить капітал необхідним фактором виробництва.

Рис 2.1 показує графіки функції $F(K, L, A)$ як функції від кількості капіталу K при заданих L та A у двох випадках: (А) умови Інади виконані, а (В) – ні.

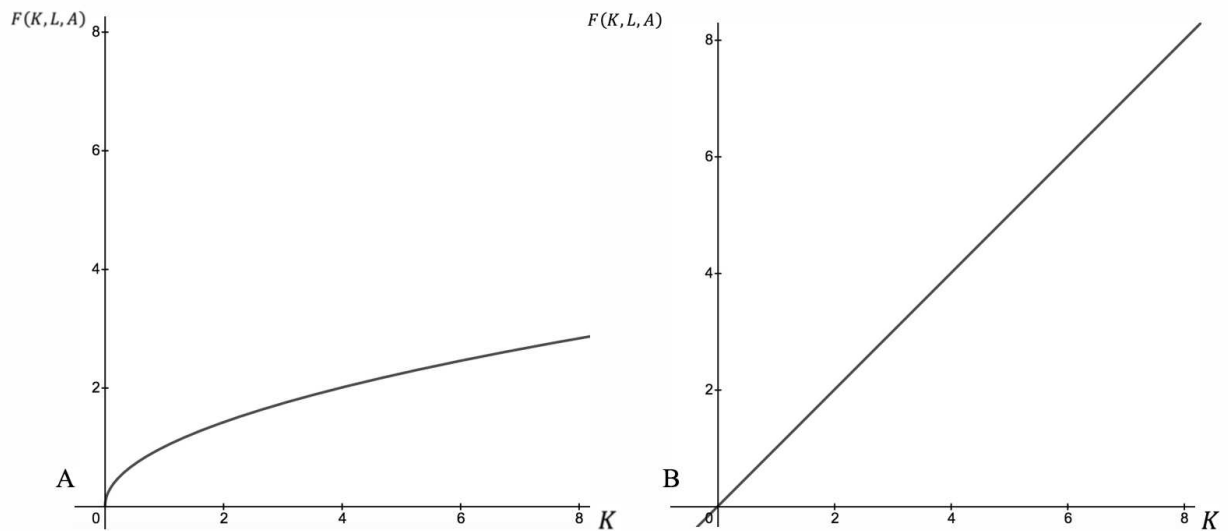


Рисунок 2.1 – Виробнича функція. (А) задовольняє умовам Інади в припущенні 2, а (В) – ні.

2.2 Модель Солоу в дискретному часі

Знос капіталу K являється експоненційним, з чого випливає, що закон зміни кількості капіталу можна описати рівнянням (2.7):

$$K(t + 1) = (1 - \delta)K(t) + I(t), \quad (2.7)$$

де змінна $I(t)$ позначає інвестиції в періоді t .

Тотожності системи національних рахунків в закритій економіці гарантує, що весь вироблений продукт використовується в якості кінцевого споживання або в якості інвестицій (2.8), тобто

$$Y(t) = C(t) + I(t), \quad (2.8)$$

де змінна $C(t)$ позначає споживання в періоді t . Із рівнянь (2.1), (2.7) та (2.8) випливає, що будь-яке доступне динамічне розподілення ресурсів повинно задовольняти наступній умові:

$$K(t + 1) \leq F(K(t), L(t), A(t)) + (1 - \delta)K(t) - C(t)$$

при $t = 0, 1, \dots$. Наша задача полягає в пошуку рівноважного динамічного розподілу ресурсів в множині всіх допустимих розподілів. В даному випадку правило поведінки господарств, які зберігають фіксовану частину свого прибутку, значно полегшує структуру рівноваги. З цього витікає, що всі оцінки та порівняння рівня добробуту агентів, основані на моделі Солоу, варто розглядати з певною долею скептицизму, оскільки ми не знаємо які насправді вподобання у господарств.

Оскільки ми розглядаємо закриту економіку (та державні витрати відсутні), сукупні інвестиції в ній дорівнюють заощадженням:

$$S(t) = I(t) = Y(t) - C(t).$$

Припущення щодо того, що господарства зберігають постійну долю прибутку $s \in (0, 1)$ можна записати у вигляді рівняння (2.9):

$$S(t) = sY(t), \quad (2.9)$$

з чого, в свою чергу, витікає, що вони споживають долю прибутку (2.10), що залишилась $(1 - s)$, тобто

$$C(t) = (1 - s)Y(t). \quad (2.10)$$

Рівняння рівноваги на ринку капіталу (2.9) означає, що кількість капіталу, яка наявна в економіці в результаті дій господарств, в момент часу $t + 1$ можна виразити як

$$K(t + 1) = (1 - \delta)K(t) + S(t) = (1 - \delta)K(t) + sY(t).$$

Прирівнюючи попит та пропозицію на ринку капіталу та використовуючи рівняння (2.1) та (2.7), ми отримуємо фундаментальний закон накопичення капіталу в моделі Солоу (2.11):

$$K(t + 1) = sF(K(t), L(t), A(t)) + (1 - \delta)K(t). \quad (2.11)$$

Це нелінійне різницеве рівняння. Рівновага в моделі Солоу описується рівнянням (2.11) та рівняннями, що описують динаміку змінних $L(t)$ та $A(t)$.

Модель Солоу знаходиться між моделями кейнсіанського типу та сучасними динамічними макроекономічними моделями. Рішення господарств щодо споживання та накопичення в ній не являються наслідками оптимізації.

Рівняння (2.9) та (2.10) являються нашими припущеннями щодо поведінки господарств. Не зважаючи на це, ми моделюємо фірми як ті, що бажають максимізувати свій прибуток та вважаємо, що ринки факторів виробництва знаходяться в рівновазі. Тому ми можемо визначити поняття рівноваги звичним для сучасних динамічних макроекономічних моделей способом.

Зафіксуємо послідовності $\{L(t), A(t)\}_{t=0}^{\infty}$ та початкове значення капіталу $K(0)$. Рівноважною траєкторією називають набір послідовностей $\{K(t), Y(t), C(t), w(t), R(t)\}_{t=0}^{\infty}$, таких, що $K(t)$ задовольняє умову (2.11), $Y(t)$ задається рівнянням (2.1), $C(t)$ задається рівнянням (2.11), а $w(t)$ та $R(t)$ задовольняють рівнянням (2.5) та (2.6).

Варто відзначити найбільш важливу частину визначення. Рівновага визначається як динамічна траєкторія розподілу ресурсів. Економічна рівновага не є статичним об'єктом, вона описує поведінку агентів в економіці протягом всього часу її існування. Також відзначимо, що визначення включає в себе умови рівноваги на ринках факторів виробництва (2.5) та (2.6). Такий підхід є стандартним в макроекономічних моделях та моделях економічного росту.

Почнемо описання рівноваги з наступних припущень:

- населення в економіці не змінюється. $L(t) = L, L > 0$;
- технологічний прогрес відсутній. $A(t) = A$.

Введемо поняття відношення капіталу до праці (капіталоозброєності) в економіці (2.12):

$$k(t) = \frac{K(t)}{L}. \quad (2.12)$$

З припущення щодо постійної віддачі від масштабу випливає, що випуск (прибуток) на душу населення $y(t) \equiv Y(t)/L$ може бути представленим у вигляді рівняння (2.13):

$$y(t) = K\left(\frac{K(t)}{L}, 1, A\right) \equiv f(k(t)). \quad (2.13)$$

Інакше кажучи, при постійній віддачі від масштабу прибутку на душу населення є функцією від капіталоозброєності економіки.

Ми можемо використовувати виробничу функцію i , поділив обидві частини рівняння (2.11) на L , отримаємо просте різницеве рівняння моделі Солоу (2.14). Воно описує динаміку капіталоозброєності економіки $k(t)$:

$$k(t + 1) = sf(k(t)) - (1 - \delta)k(t). \quad (2.14)$$

Визначимо що таке стаціонарна рівновага в моделі Солоу.

Стаціонарною рівновагою моделі без росту населення та технологічного прогресу називають рівноважну траєкторію, на якій $k(t) = k^*$ для всіх t .

В існуванні стаціонарного розв'язку легко впевнитися графічно. Для цього потрібно представити динаміку рівноважного різницевого рівняння (2.14) на графіку. Такий спосіб представлено на рис. 2.2. Суцільна лінія відповідає правій частині рівняння (2.14), а пунктирна пролягає під кутом 45° . Їх перетин в додатній області визначає значення капіталоозброєності економіки в стаціонарній рівновазі k^* та задовольняє умові (2.15):

$$\frac{f(k^*)}{k^*} = \frac{\delta}{s}. \quad (2.15)$$

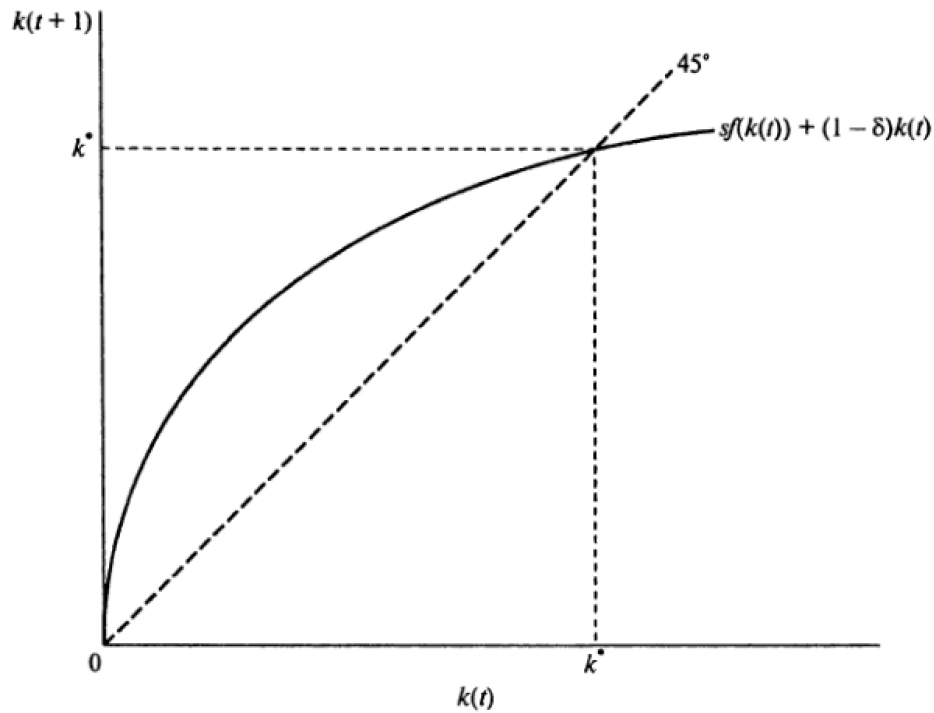


Рисунок 2.2 – Визначення капіталоозброєності в стаціонарній рівновазі в моделі без росту населення та технологічного прогресу

Також на рис. 2.2 можна помітити ще один перетин, в точці $k = 0$. Його існування витікає із умов Інади, однак розглядати його ми не будемо.

Розглянемо базову модель Солоу в припущеннях 1 та 2. Тоді в ній існує єдина стаціонарна рівновага, в якій капіталоозброєність $k^* \in (0, \infty)$ задовольняє умові (2.15), тоді випуск на душу населення матиме вигляд (2.16):

$$y^* = f(k^*), \quad (2.16)$$

а споживання на душу населення буде описуватися рівнянням (2.17):

$$c^* = (1 - s)f(k^*). \quad (2.17)$$

Структура моделі Солоу, яку ми розглядаємо, є досить обмеженою. Модель має невелику кількість параметрів та абстрагується від багатьох особливостей реального світу. Однак основною задачею для нас є розуміння

зв'язку між відмінностями значень тих або інших параметрів в різних країнах та відмінностями темпів їх розвитку.

Розглянемо виробничу функцію та припустимо, що вона задана наступним чином

$$f(k) = A\tilde{f}(k),$$

де $A > 0$. Ми можемо розглядати змінну A як множник, який змінює продуктивність факторів. Його більше значення відповідає їх більшій продуктивності. Для нас це просто зручний спосіб параметризації відмінностей в продуктивності факторів різних країн. Оскільки ми припускаємо, що функція $f(k)$ задовольняє умовам гладкості, то функція $\tilde{f}(k)$ – також.

Нехай припущення 1 та 2 виконуються, а $f(k) = A\tilde{f}(k)$. Позначимо значення капіталоозброєності та випуску в стаціонарній рівновазі $k^*(A, s, \delta)$ та $y^*(A, s, \delta)$ відповідно, де A, s та δ – параметри моделі. Тоді

$$\frac{\partial k^*(A, s, \delta)}{\partial A} > 0, \frac{\partial k^*(A, s, \delta)}{\partial s} > 0 \text{ та } \frac{\partial k^*(A, s, \delta)}{\partial \delta} < 0,$$

$$\frac{\partial y^*(A, s, \delta)}{\partial A} > 0, \frac{\partial y^*(A, s, \delta)}{\partial s} > 0 \text{ та } \frac{\partial y^*(A, s, \delta)}{\partial \delta} < 0.$$

З цього випливає, що країни з більш високою нормою накопичення та кращою технологією матимуть більш високу капіталоозброєність і тому будуть заможнішими. Країни з більшою нормою амортизації будуть мати менше відношення капіталу до праці і тому будуть біднішими. Ці результати досить інтуїтивні та дають нам перший погляд на можливі фактори, які визначають значення капіталоозброєності економіки та рівня прибутку в ній.

2.3 Перехідна динаміка в моделі Солоу в дискретному часі

Поведінка системи в економіці поза стаціонарною точкою підпорядковується закону рівності попиту та пропозиції та являється наслідком оптимізаційної поведінки фірм та господарств. Більшість реальних економік проводять значну частину часу саме поза станом стаціонарної рівноваги. Тому нас цікавить вся рівноважна траєкторія розвитку економіки, а не тільки її стаціонарний стан.

Щоб визначити, як виглядає рівноважна траєкторія простої модельної економіки, яку ми вивчаємо, нам необхідно дослідити перехідну динаміку рівноважного різницевого рівняння (2.14), починаючи з довільного значення капіталоозброєності економіки в початковий момент часу $k(0) > 0$. Особливо нас цікавить чи буде економіка сходитись до стаціонарної рівноваги, починаючи з довільного значення відношення капіталу до праці, та яка буде її динаміка на траєкторії збіжності. Необхідно визначити, чи буде рівняння (2.14) приводити економіку до єдиної стаціонарної рівноваги незалежно від початкової умови відношення капіталу до праці.

Розглянемо нелінійну систему автономних різницевих рівнянь (2.18):

$$x(t+1) = G(x(t)), \quad (2.18)$$

де $x(t) \in \mathbb{R}^n$ і $G: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{R}$. Назвемо x^* нерухомою точкою відображення $G(\cdot)$, якщо

$$x^* = G(x^*).$$

Ми також називатимемо x^* стаціонарною точкою різницевого рівняння (2.18).

Стаціонарна точка різницевого рівняння (2.18) x^* називається локально асимптотично стійкою, якщо існує відкрита множина $B(x^*)$, яка містить x^*

такий, що для будь-якого розв'язку рівняння (2.18) $\{x(t)\}_{t=0}^{\infty}$ з $x(0) \in B(x^*)$ випливає $x(t) \rightarrow x^*$ при $t \rightarrow \infty$. Точка x^* називається глобально асимптотично стійкою, якщо $x(t) \rightarrow x^*$ при $t \rightarrow \infty$ для будь-якого розв'язку рівняння (2.18) $\{x(t)\}_{t=0}^{\infty}$ при будь-якому $x(0) \in \mathbb{R}^n$.

Розглянемо систему лінійних різницьових рівнянь (2.19):

$$x(t+1) = Ax(t) + b, \quad (2.19)$$

з початковою умовою $x(0)$, де $x(t) \in \mathbb{R}^n$ для будь-якого t , A – матриця $n \times n$, b – вектор $n \times 1$. Нехай x^* – стаціонарна точка системи різницьових рівнянь (2.19), тобто $x^* = Ax^* + b$. Нехай всі власні значення матриці A лежать строго всередині одиничного кола комплексної площини. Тоді стаціонарна точка системи рівнянь (2.19) x^* являється глобально асимптотично стійкою, тобто для будь-якого $x(0) \in \mathbb{R}^n$ єдиний розв'язок $\{x(t)\}_{t=0}^{\infty}$ задовольняє властивості $x(t) \rightarrow x^*$ при $t \rightarrow \infty$.

Розглянемо систему різницьових рівнянь (2.18). Нехай x^* – стаціонарна точка системи. Припустимо, що оператор G диференційований по x . Визначимо матрицю

$$A \equiv DG(x^*),$$

де DG – матриця часткових похідних (якобіан) відображення G .

Припустимо, що всі власні значення матриці A лежать на комплексній площині строго всередині одиничного кола. Тоді стаціонарна точка системи різницьових рівнянь (2.18) x^* є локально асимптотично стійкою, тобто існує відкритий окіл точки x^* , $B(x^*) \subset \mathbb{R}^n$ така, що для будь-якого розв'язку системи (2.18), задовольняючого умові $x(0) \in B(x^*)$, $x(t) \rightarrow x^*$ при $t \rightarrow \infty$.

З цього маємо наступні наслідки:

Нехай $x(t), a, b \in \mathbb{R}$. Якщо $|a| < 1$, то єдиний стаціонарний розв'язок лінійного різницевого рівняння $x(t+1) = ax(t) + b$ є глобально асимптотично стійким, тобто $x(t) \rightarrow x^* = \frac{b}{1-a}$ при $t \rightarrow \infty$.

Нехай $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – функція, диференційована в околі стаціонарної точки x^* , де $g(x^*) = x^*$. Припустимо, що $|g'(x^*)| < 1$. Тоді стаціонарний розв'язок нелінійного різницевого рівняння $x(t+1) = g(x(t))$ є локально асимптотично стійким. Більш того, якщо функція g є неперервно диференційованою на всій числовій прямій \mathbb{R} та $|g'(x)| < 1$ для всіх $x \in \mathbb{R}$, то стаціонарний розв'язок x^* є глобально асимптотично стійким.

Тепер ми можемо застосувати перший наслідок до рівноважного різницевого рівняння моделі Солоу (2.14) та переконатися в локальній стійкості стаціонарної рівноваги. Глобальна рівновага з наслідку не випливає.

Нехай припущення 1 та 2 виконані. Тоді стаціонарна рівновага моделі росту Солоу, що описана рівнянням (2.14), є глобально асимптотично стійкою і капіталоозброєність економіки $k(t)$ монотонно збігається до k^* при будь-яких початкових умовах $k(0) > 0$.

Нехай припущення 1 та 2 виконані, і $k(0) < k^*$. Тоді рівноважна траєкторія заробітної платні $\{w(t)\}_{t=0}^{\infty}$ є зростаючою послідовністю, а рівноважна траєкторія орендної вартості капіталу $\{R(t)\}_{t=0}^{\infty}$ є спадною послідовністю. Якщо $k(0) > k^*$ все навпаки, заробітна платня є спадною послідовністю, а орендна вартість капіталу – зростаючою.

Отже, можна сказати, що у випадку, коли кількість капіталу в економіці в початковий момент часу мала по відношенню до пропозиції праці, то відношення капіталу до праці буде зростати. Тому як наслідок спадаючої віддачі від капіталу його граничний продукт буде скорочуватися, а заробітна платня зростати. Аналогічно, якщо економіка стартує із занадто великою кількістю капіталу на душу населення, то вона буде скорочуватись і в процесі розвитку заробітна платня буде спадати, а орендна вартість капіталу зростати.

Наш аналіз моделі Солоу показує, що вона має ряд корисних властивостей: єдиність стаціонарної рівноваги, глобальна асимптотична стійкість, а також проста та інтуїтивно зрозуміла порівняльна статика моделі. Однак в розглянутій нами версії моделі поки відсутній ріст економіки. В стаціонарній рівновазі капіталоозброєність економіки стала, розширення капіталу не відбувається і тому прибуток на душу населення також є сталим. Отже, економічний розвиток в базовій моделі Солоу, без технологічного прогресу, можливий лише тоді, коли $k(0) < k^*$, проте він не є стійким, з часом він сповільнюється та економіка перестає рости.

2.4 Модель Солоу з технологічним прогресом

До сих пір ми розглядали модель Солоу без технічного прогресу. Для відображення змін в технологічних можливостях економіки ми будемо використовувати змінну $A(t)$, її ріст буде відображати покращення технологій та накопичення знань в економіці. Нема ніяких сумнівів у тому, що нині суспільство може виробляти набагато більше різноманітних товарів та послуг, ніж у минулому, більш того, воно може робити це ефективніше. Доступні нам виробничі технології значно покращилися за останній час. Тому введення в модель можливості технологічного прогресу виглядає цілком логічним.

Головне питання, на яке необхідно відповісти, полягає в тому, яким чином нам варто вплив зміни $A(t)$ на агреговану виробничу функцію. Стандартний підхід полягає в тому, щоб накласти обмеження на тип технологічного прогресу так, щоб рівновага розподілу ресурсів була узгодженою з траєкторією збалансованого росту, як вона визначається фактами Калдора. Він помітив, що не зважаючи на збільшення випуску на душу населення в багатьох країнах світу, інші показники: капіталоозброєність, норма процента та розподіл прибутку між працею та капіталом, залишаються незмінними. Наприклад, на рис. 2.3 зображена динаміка часток прибутку капіталу та праці в національному прибутку в США.

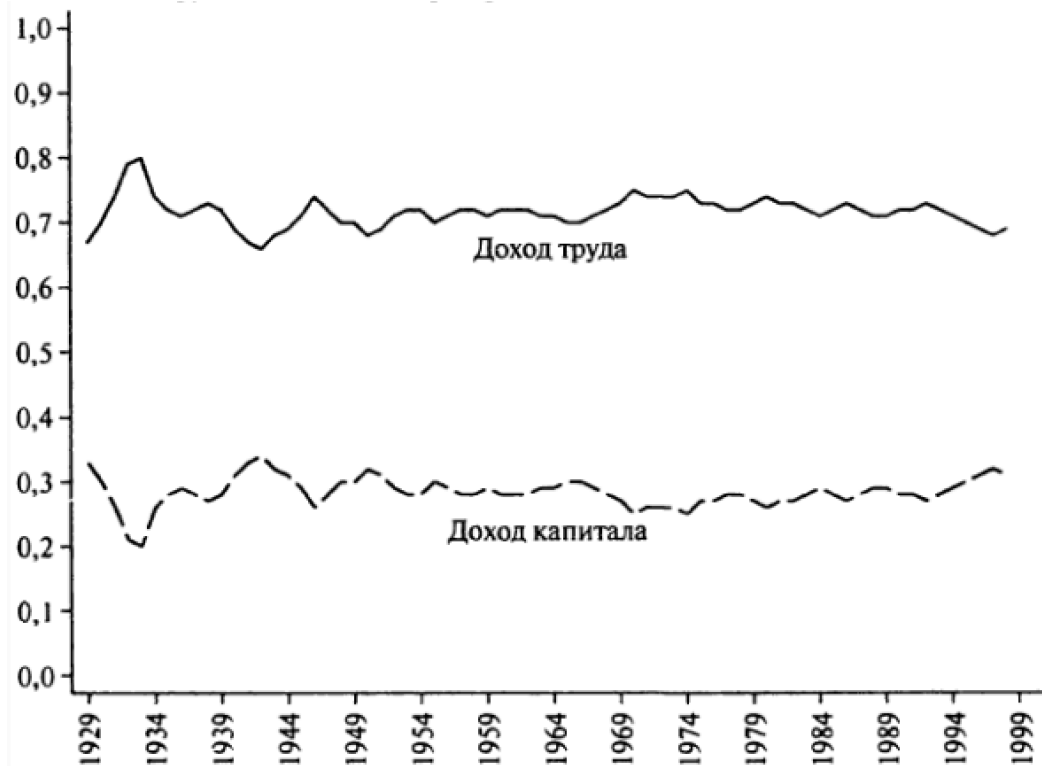


Рис. 2.3 – Частки прибутку капіталу та праці в ВВП США

Рисунок 2.3 показує, що, не зважаючи на значні коливання, динаміка часток не має вираженого тренду. Більш того, емпіричні свідчення кажуть про відсутність вираженого тренду в динаміці норми процентів на довгостроковому проміжку часу.

Також з рис. 2.3 можна помітити, що частка прибутку капіталу в національному прибутку складає близько $1/3$, а доля трудових прибутків – близько $2/3$. Ці оцінки ігнорують частку прибутків землевласників, оскільки в сучасній економіці земля не являється важливим фактором виробництва. Такий розподіл прибутку та бажання багатьох економістів працювати з простими моделями стали причинами вибору виробничої функції Кобба-Дугласа у вигляді $AK^{1/3}L^{2/3}$ як стандарту багатьох макроекономічних моделей.

Ще однією важливою перевагою моделей з траєкторією збалансованого росту є значно більш простий аналіз їх динаміки в порівнянні з моделями, що не мають такої траєкторії. Ця простота є наслідком того, що при наявності такої траєкторії, рівняння, що визначає динаміку моделі, при трансформації змінних стає диференціальним або різницевим рівнянням з добре визначеною стаціонарною точкою. Це дає нам змогу використовувати для аналізу моделей

економічного росту методи аналізу автономних систем. Проте варто пам'ятати, що в реальності економічний ріст світової економіки має ряд характеристик, які не притаманні збалансованій траєкторії. Наприклад, частка різних секторів систематично змінюється в процесі росту: частка сільського господарства зменшується, частка промисловості спочатку збільшується, а потім також скорочується, тощо.

Які обмеження накладаються на модель вимогами наявності траєкторії збалансованого росту? Загальний вигляд виробничої функції $F(K(t), L(t), A(t))$ виявляється занадто «широким» для досягнення збалансованої траєкторії і лише декілька спеціальних видів виробничої функції узгоджуються зі збалансованим ростом економіки в рівновазі. Щоб переконатися в цьому, візьмемо виробничу функцію \tilde{F} та розглянемо кілька типів нейтрального технологічного прогресу. Одним з варіантів являється наступний:

$$\tilde{F}(K(t), L(t), A(t)) = A(t)F(K(t), L(t))$$

з деякою функцією F з постійною віддачою від масштабу. Ця функціональна форма припускає, що технологічна змінна A є мультиплікативним множником перед деякою квазівиробничою функцією F . Такий тип технологічного прогресу називають нейтральним по Хіксу. Він зображений на рис. 2.4, на якому зображені ізокванти функції $\tilde{F}(K(t), L(t), A(t))$, тобто пари значень праці та капіталу, що відповідають заданому значенню випуску при фіксованому значенні змінної $A(t)$.

Іншою альтернативою є нейтральний по Солоу, або капіталоінтенсивний, технологічний прогрес, зображений на рис. 2.4. Функціонально його можна представити як

$$\tilde{F}(K(t), L(t), A(t)) = F(A(t)K(t), L(t)).$$

Капіталоінтенсивним його називають через те, що в цьому випадку технологічний прогрес еквівалентний збільшенню капіталу в економіці.

Останнім випадком є технологічний прогрес нейтральний по Харроду, рис. 2.4. Він має таке функціональне представлення:

$$\tilde{F}(K(t), L(t), A(t)) = F[K(t), A(t)L(t)].$$

Тут збільшення технологічної змінної $A(t)$ збільшує випуск в економіці.

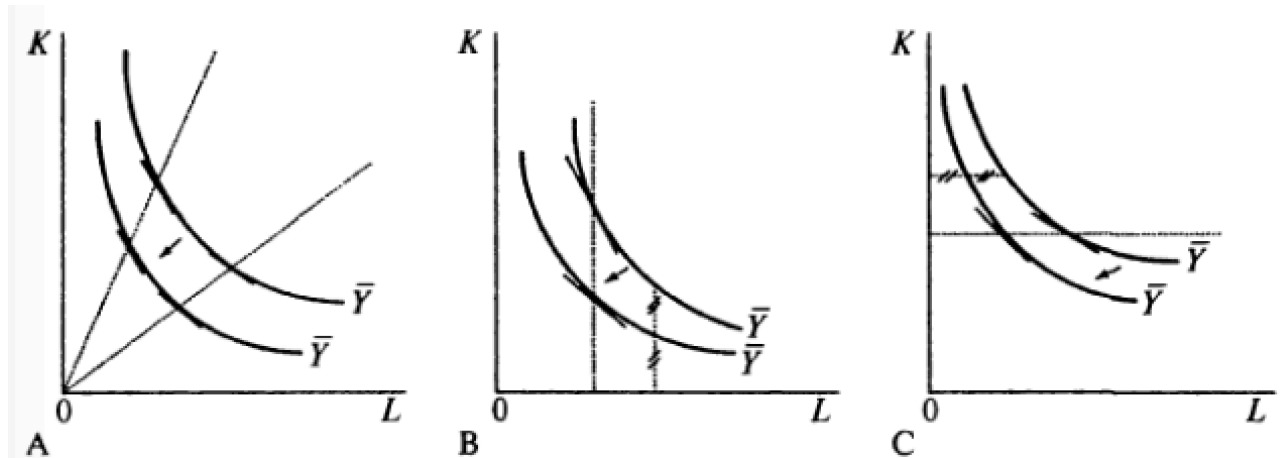


Рисунок 2.4 – Технологічний прогрес (А) нейтральний по Хіксу, (В) нейтральний по Солоу, (С) нейтральний по Харроду

Звичайно в житті технологічні зміни можуть бути комбінацією описаних нами типів технологічного прогресу.

Не зважаючи на те, що всі типи технологічного прогресу виглядають однаково прийнятними для опису реальної економіки, лише прогрес по Харроду узгоджується з наявністю траєкторії збалансованого росту.

Долі капіталу та праці в національному прибутку задаються наступним чином:

$$\alpha_K(t) \equiv \frac{R(t)K(t)}{Y(t)} \text{ та } \alpha_L(t) \equiv \frac{w(t)L(t)}{Y(t)},$$

$$\alpha_K(t) + \alpha_L(t) = 1.$$

Розглянемо теорему, яка показує, що з припущення щодо постійних темпів росту випуску, капіталу та споживання, в купі з припущенням щодо постійної віддачі від масштабу приводить до того, що агрегована виробнича функція повинна мати вигляд, що відповідає технологічному прогресу нейтральному по Харроду.

Перша теорема Узави. Розглянемо модель економічного росту з агрегованою виробничою функцією вигляду:

$$Y(t) = \tilde{F}(K(t), L(t), A(t)),$$

де функція $\tilde{F}: \mathbb{R}_+^2 \times A \rightarrow \mathbb{R}_+$, а змінна $\tilde{A}(t) \in A$ представляє технологію в момент часу t , і A – деяка довільна підмножина \mathbb{R}^N , $N \in \mathbb{N}$. Припустимо, що функція \tilde{F} має властивість постійної віддачі від масштабу по змінним K та L . Сукупне ресурсне обмеження в економіці виглядає так

$$\dot{K}(t) = Y(t) - C(t) - \delta K(t).$$

Припустимо, що населення росте з постійним темпом n , тобто $L(t) = \exp(nt)L(0)$ та існує константа $T < \infty$, така, що для всіх

$$t \geq \frac{T\dot{Y}(t)}{Y(t)} = g_Y > 0, \frac{\dot{K}(t)}{K(t)} = g_K > 0, \frac{\dot{C}(t)}{C(t)} = g_C > 0.$$

Тоді

- $g_Y = g_K = g_C$;
- для всіх $t \geq T$ однорідна степені 1 функція $F: \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$, така, що агрегована виробнича функція може бути представленою у вигляді:

$$Y(t) = F(K(t), A(t)L(t)),$$

де $A(t) \in \mathbb{R}_+$ і

$$\frac{\dot{A}(t)}{A(t)} = g = g_Y - n.$$

Наслідком теореми є те, що для всіх $t \geq T$ технологічний прогрес може бути представленим в формі нейтрального по Харроду.

Варто відзначити, що теорема не потребує щоб виробнича функція мала вигляд

$$Y(t) = F(K(t), A(t)L(t)).$$

Вона лише стверджує, що такий вигляд існує.

Розглянемо агреговану виробничу функцію Кобба-Дугласа:

$$Y(t) = (A_K(t)K(t))^\alpha (A_L(t)L(t))^{1-\alpha}.$$

На траєкторії збалансованого росту обидві технологічні змінні $A_K(t)$ та $A_L(t)$ повинні рости з однаковим темпом. Якщо ми визначимо нову змінну $A(t)$ як $A(t) = A_K(t)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} A_L(t)$, то виробнича функція може бути представлена у вигляді:

$$Y(t) = K(t)^\alpha (A(t)L(t))^{1-\alpha},$$

тож технологічний прогрес виявляється трудоінтенсивним, як того и потребує перша теорема Узави.

Проте ця теорема нічого не каже про поведінку цін факторів виробництва. В той же час факти Калдора потребують, щоб долі факторів в

національному прибутку були сталими. Оскільки капітал та випуск ростуть з однаковим темпом, орендна вартість капіталу має бути сталою.

Наступна теорема показує, що якщо частки факторів виробництва в національному прибутку сталі, то на траєкторії збалансованого росту часткові похідні \tilde{F} та F будуть узгодженими, і навпаки.

Друга теорема Узави. Нехай всі умови першої теореми виконані. Також припустимо що наявна досконала конкуренція на ринках факторів виробництва і що орендна вартість капіталу задовольняє умові $R(t) = R^*$ для всіх $t \geq T$. Тоді для часткових похідних функцій \tilde{F} та F по їх обом аргументам виконуються рівності:

$$\tilde{F}_K(K(t), L(t), \tilde{A}(t)) = F_K(K(t), A(t)L(t))$$

і

$$\tilde{F}_L(K(t), L(t), \tilde{A}(t)) = A(t)F_L(K(t), A(t)L(t)).$$

Більш того, якщо виконуються ці рівності і ринки факторів виробництва конкурентні, то $R(t) = R^*$ для всіх $t \geq T$.

З цієї теореми випливає, що будь-який розподіл ресурсів з постійними темпами росту випуску, капіталу та споживання повинен бути траєкторією збалансованого росту. Також з неї випливає, що траєкторія збалансованого росту може існувати лише коли технологічний прогрес в виробничій функції є нейтральним по Харроду.

Друга теорема показує додаткову економічну інтуїцію, що стоїть за першою теоремою. Нехай виробнича функція має спеціальний вигляд

$$F(A_K(t)K(t), A_L(t)L(t)).$$

З другої теореми випливає, що частки факторів виробництва мають бути постійними при $t \rightarrow \infty$. Тоді, беручи до уваги властивість постійної віддачі від масштабу, наявність траєкторії збалансованого росту починаючи з деякого моменту часу T можлива лише в тому випадку, коли ефективна кількість капіталу $A_K(t)K(t)$ та ефективна кількість праці $A_L(t)L(t)$ ростуть з однаковими темпами. Інакше частка капіталу або праці перестане бути постійною. Якщо ж вони все ж таки ростуть з однаковими темпами, то випуск $Y(t)$ буде рости з таким самим темпом, в силу постійності віддачі від масштабу. З іншого боку, з того, що відношення капіталу до випуску постійно знаходиться в стані стаціонарної рівноваги, випливає, що ефективна кількість капіталу $K(t)$ повинна рости з тим самим темпом, що і випуск, а отже і змінна $A_L(t)L(t)$ також. З усього цього маємо, що для збалансованого росту необхідно, аби змінна $A_K(t)$ залишалася незмінною починаючи з деякого моменту часу T .

2.5 Висновки за розділом 2

У другому розділі дипломної роботи ми навели загальну теорію щодо моделі росту Солоу в дискретному часі. Описали структуру економіки, яку можна моделювати за допомогою моделі Солоу. Визначили виробничу функцію та загальні вимоги до ринку капіталу, праці, конкуренції, попиту та пропозиції.

Визначили, що без технологічного прогресу розвиток економіки в певний момент часу стає просто неможливим.

РОЗДІЛ 3 КІЛЬКІСНІ ТА ЯКІСНІ ДОСЛІДЖЕННЯ УЗАГАЛЬНЕНОЇ МОДЕЛІ СОЛОУ

3.1 Узагальнена модель Солоу

Основні складові елементи моделі:

- Виробнича функція:

$$Y_t = F(K_t, L_t, A_t)$$

- Незмінний ефект масштабу:

$$F(\lambda K_t, \lambda L_t) = \lambda F(K_t, L_t)$$

- Часто розглядається окремий випадок: виробнича функція Кобба-Дугласа, за допомогою технології збільшення праці:

$$F(K, L) = K^\alpha (AL)^{1-\alpha}$$

- Іноді функцію формують як:

$$F(K, L) = AK^\alpha L^{1-\alpha}$$

- Екзогенний приріст населення:

$$L_t = (1 + n)L_{t-1}$$

- Постійна норма амортизації капіталу: δ

- Екзогенна норма заощаджень:

$$S_t = sY_t,$$

$$C_t = (1 - s)Y_t$$

- Якщо економіка замкнута, то заощадження дорівнюють інвестиціям:

$$I_t = S_t$$

- Екзогенний технічний прогрес:

$$A_t = (1 + g)A_{t-1}$$

Механіка моделі.

Припустимо, що технологічного прогресу немає:

- Скільки капіталу накопичить економіка?
- Чи зросте економіка? Та на скільки?

Припустимо, що $g = 0$ на даний момент і $A = 1$

Функція експрес-виробництва в розрахунку на душу населення:

$$y_t = \frac{Y_t}{L_t} = \frac{1}{L_t} F(K_t, L_t) = F\left(\frac{K_t}{L_t}, 1\right) \equiv f(k_t),$$

де

$$k_t \equiv \frac{K_t}{L_t}.$$

Зауважте, що ми використовуємо взаємозаміну «на душу населення» та «на одного працівника», але $\frac{\text{робоча сила}}{\text{населення}}$ може змінюватися в часі та в різних країнах [3].

Фонд капіталу розвивається відповідно до:

$$K_{t+1} = (1 - \delta)K_t + I_t = (1 - \delta)K_t + sY_t$$

$$\Delta K_{t+1} = -\delta K_t + sY_t$$

У розрахунку на душу населення:

$$\begin{aligned}\Delta k_{t+1} &\equiv k_{t+1} - k_t = \frac{(1 - \delta)K_t + sY_t}{L_{t+1}} - k_t = \left[\frac{(1 - \delta)K_t + sY_t}{L_t} \right] \frac{L_t}{L_{t+1}} - k_t = \\ &= [(1 - \delta)k_t + sy_t] \frac{1}{1 + n} - k_t = \frac{sy_t - (\delta + n)k_t}{1 + n} = \frac{sf(k_t) - (\delta + n)k_t}{1 + n}\end{aligned}$$

Інтерпретація

– Графік:

$$sf(k_t),$$

та

$$(\delta + n)k_t$$

- Стаціонарний стан та конвергенція
- Немає довгострокового зростання! (ВВП зростає, ВВП на душу населення не зростає)
- Зростання під час переходу

Приклади:

- Збільшення норми заощаджень
- Зростання темпів приросту населення
- Одноразове вдосконалення технології

Стаціонарний стан в функції Кобба-Дугласа.

Для випадку Кобба-Дугласа ми можемо чітко обчислити стаціонарний капітал і вивести його.

Виробнича функція:

$$Y_t = K_t^\alpha L_t^{1-\alpha},$$

$$y_t = \frac{K_t^\alpha L_t^{1-\alpha}}{L_t} = k_t^\alpha$$

3.2 Дослідження моделі Солоу на основі s-функції Джонсона

Розглянемо модель Джонсона, попередньо визначив параметри.

$$T = A \cdot \exp \{-B \cdot \exp (-\alpha \cdot (k\Delta))\}$$

Перепишемо у вигляді:

$$T(t) = Ae^{-Be^{-\alpha(t-t_0)}} + u$$

Параметри t_0 та B відповідають за паралельне зміщення вздовж осі абсцис, u – за паралельне зміщення вздовж осі ординат. Параметр A відповідає за величину на якій настає насичення. α – за «плавність» насичення (розтягнення графіку по осі ординат).

На рис. 3.1 зображено початковий графік:

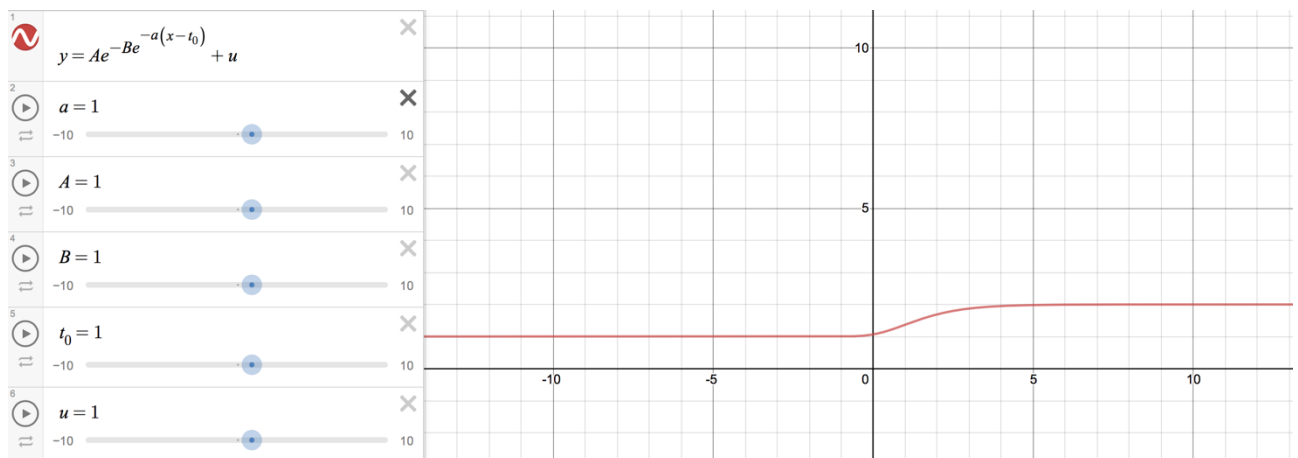


Рисунок 3.1 – Графік s-функції Джонсона при всіх параметрах рівних одиниці

Шляхом підбору параметрів змістимо криву в першу чверть (а також приведемо її до більш «робочого» вигляду), рис 3.2:

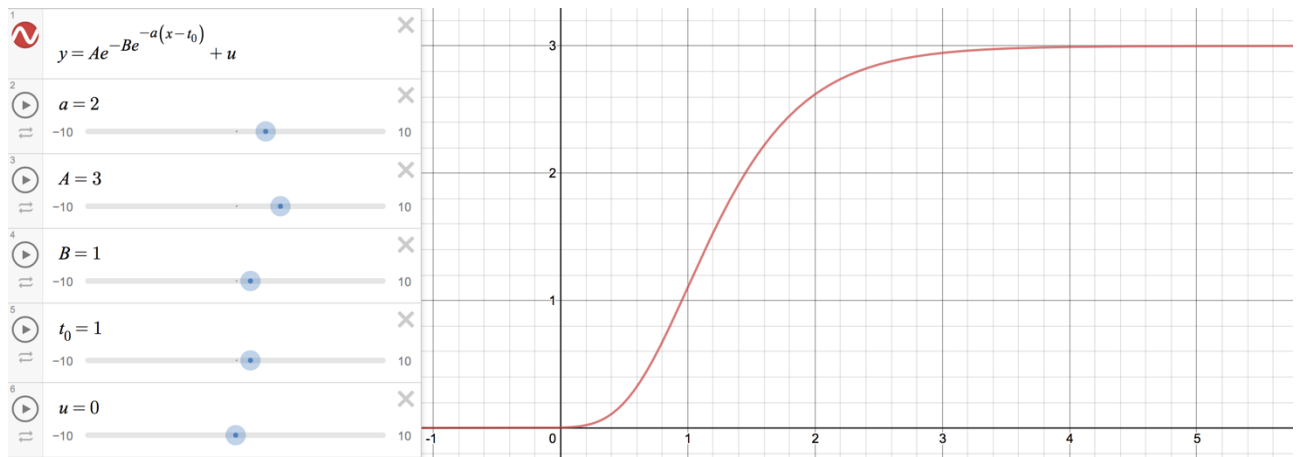


Рисунок 3.2 – Графік s-функції Джонсона зміщений в першу чверть
Обрані параметри: $t_0 = 1$; $\alpha = 2$; $B = 1$; $A = 3$; $u = 0$.

В цьому випадку наша функція приймає вигляд:

$$T(t) = 3e^{-e^{-2(t-1)}}$$

На рис. 3.3 побудована функція $T(t)$ та її перша та друга похідні:

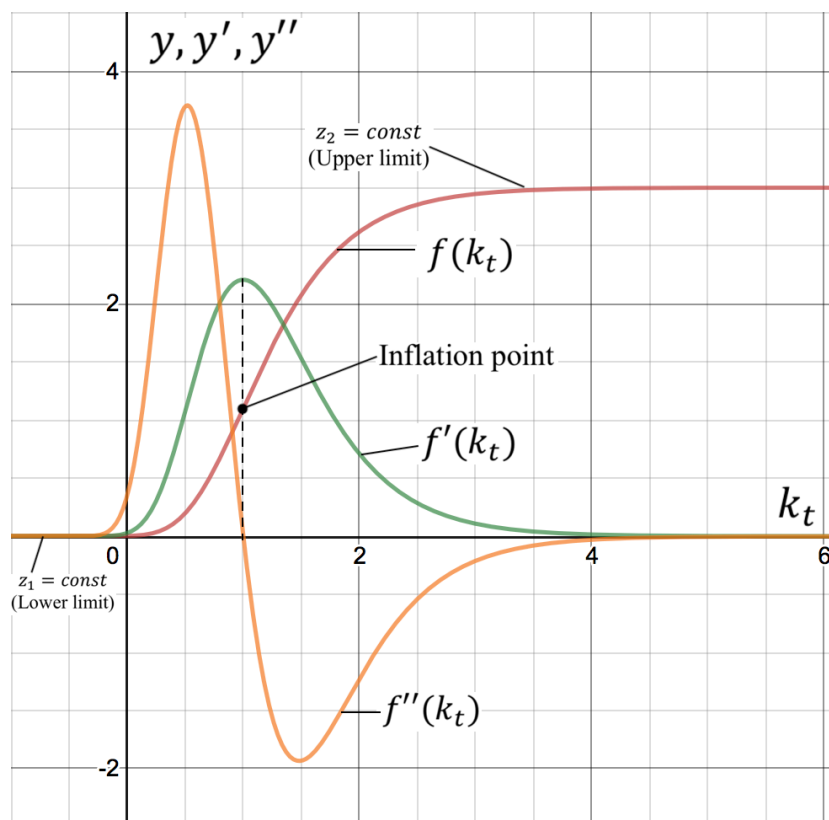


Рисунок 3.3 – Графік s-функції Джонсона та її перших двох похідних з
параметрами $t_0 = 1$; $\alpha = 2$; $B = 1$; $A = 3$; $u = 0$

Запишемо інтервали знаків похідних.

Перша похідна функції $T(t)$ додатна на всій напів-осі x . Друга похідна при $x \in (-\infty; 1]$, та змінює свій знак на від'ємний при $x \in [1; +\infty)$.

Запишемо узагальнене рівняння Солоу (3.1):

$$k_{t+1} = sT(k_t) + (1 - n - d) k_t \quad (3.1)$$

тут k_t – капітал на душу населення,

$$k_t = \frac{K_t}{L_t}.$$

S – доля інвестицій від ВВП (екзогенна змінна): $0 < s < 1$.

Нехай $s = 0.3$.

n – швидкість росту кількості населення: $0 < n < 1$.

$$n = \frac{L_{t+1} - L_t}{L_t},$$

або

$$L_{t+1} = (1 + n)L_t = (1 + n)^{t+1}L_0.$$

Нехай $n = 0.01$.

d – коефіцієнт амортизації та ремонту обладнання: $0 < d < 1$.

Нехай $d = 0.2$.

В нашій моделі візьмемо

$$f(k_t) = T(k_t) = Ae^{-Be^{-\alpha(k_t - t_0)}} + u.$$

В такому випадку рівняння (3.1) перепишемо у вигляді (3.2):

$$k_{t+1} = G(k_t) = sf(k_t) + (1 - n - d) k_t = s(Ae^{-Be^{-\alpha(k_t - t_0)}} + u) + (1 - n - d) k_t \quad (3.2)$$

Побудуємо фазові діаграми для рівняння (3.2) та зобразимо їх на рис. 3.4-3.6.

Випадок 1. Одна стійка нерухома точка (крива $G(k_t)$ після точки k_0

Проходить вище бісектриси). ($t_0 = 1; \alpha = 2; B = 1; A = 3; u = 0.5$):

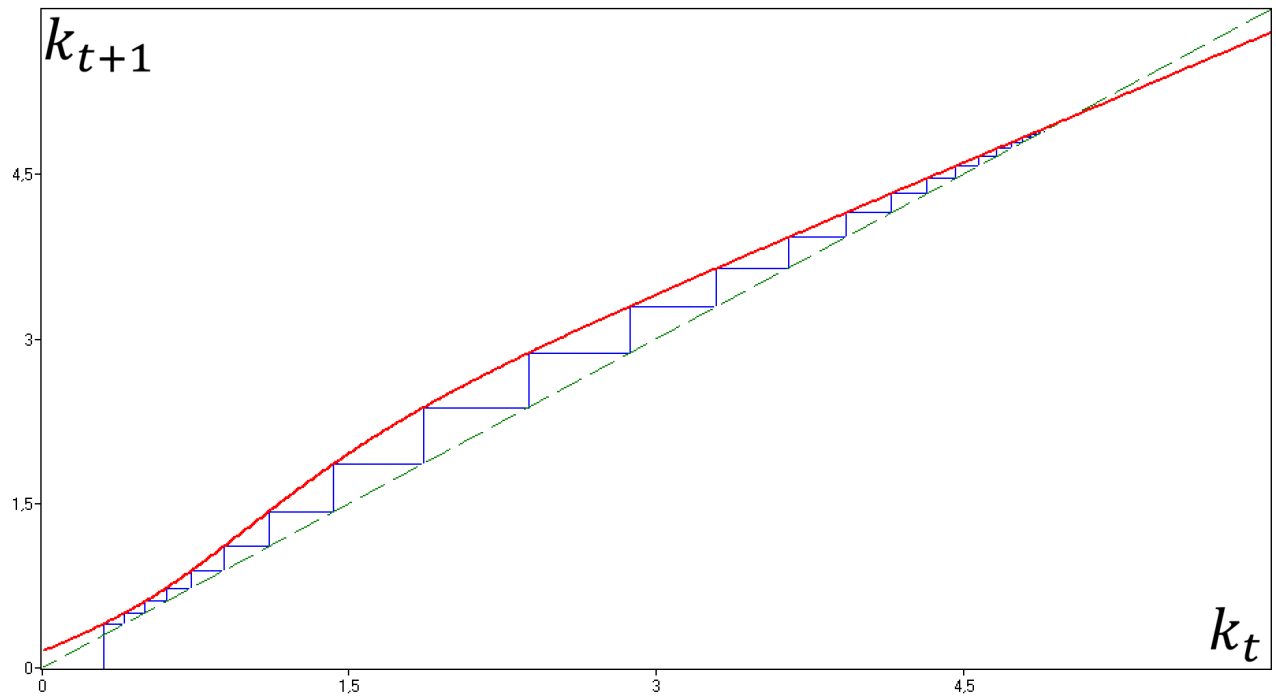


Рисунок 3.4 – Фазова діаграма для рівняння (3.2) з однією нерухомою точкою (сильна економіка)

Випадок 2. Три нерухомі точки, серед яких дві стійкі та одна нестійка (крива $G(k_t)$ перетинає бісектрису в трьох точках). ($t_0 = 1; \alpha = 2; B = 1; A = 3; u = -0.5$):

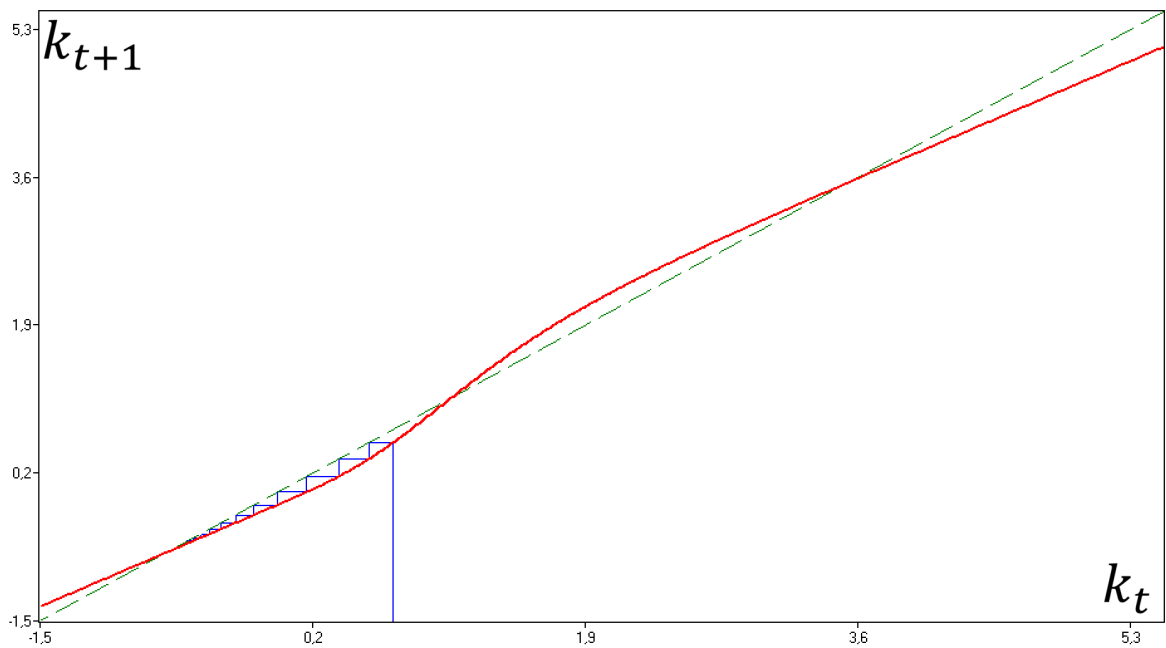


Рисунок 3.5 – Фазова діаграма для рівняння (3.2) з трьома нерухомими точками (періодична економіка)

Випадок 3. Випадок однієї стійкої нерухомої точки (крива $G(k_t)$ проходить нижче бісектриси після точки k_0). ($t_0 = 1$; $\alpha = 2$; $B = 1$; $A = 3$; $u = -2.5$):

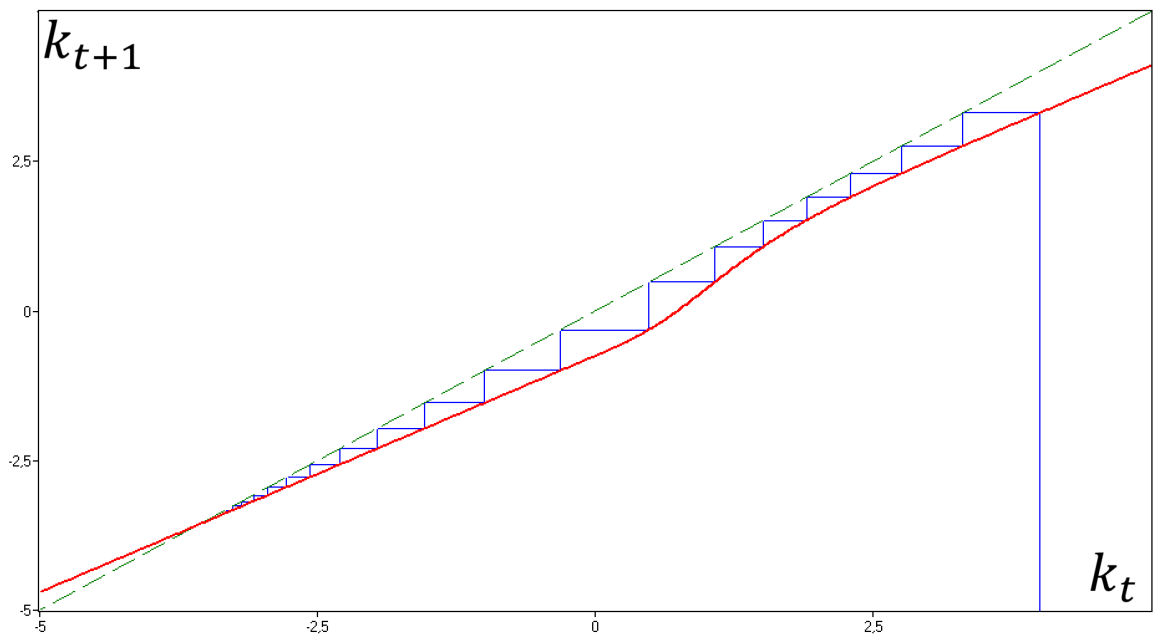


Рисунок 3.6 – Фазова діаграма для рівняння (3.2) з однією нерухомою точкою (слабка економіка)

Обираємо випадок 1, оскільки на практиці випадки 2 та 3 непридатні (в цих випадках нерухомі точки являються пастками).

Нерухома точка:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} k_t = k_* = 5$$

Виберемо момент часу $\beta = t$ (ціле число), з умови: $k_\beta = \rho k_*$

Візьмемо $\rho = 0.9$, тоді $k_\beta = 0.9 \cdot 5 = 4.5$

З рис. 3.7 знаходимо $\beta = 15$.

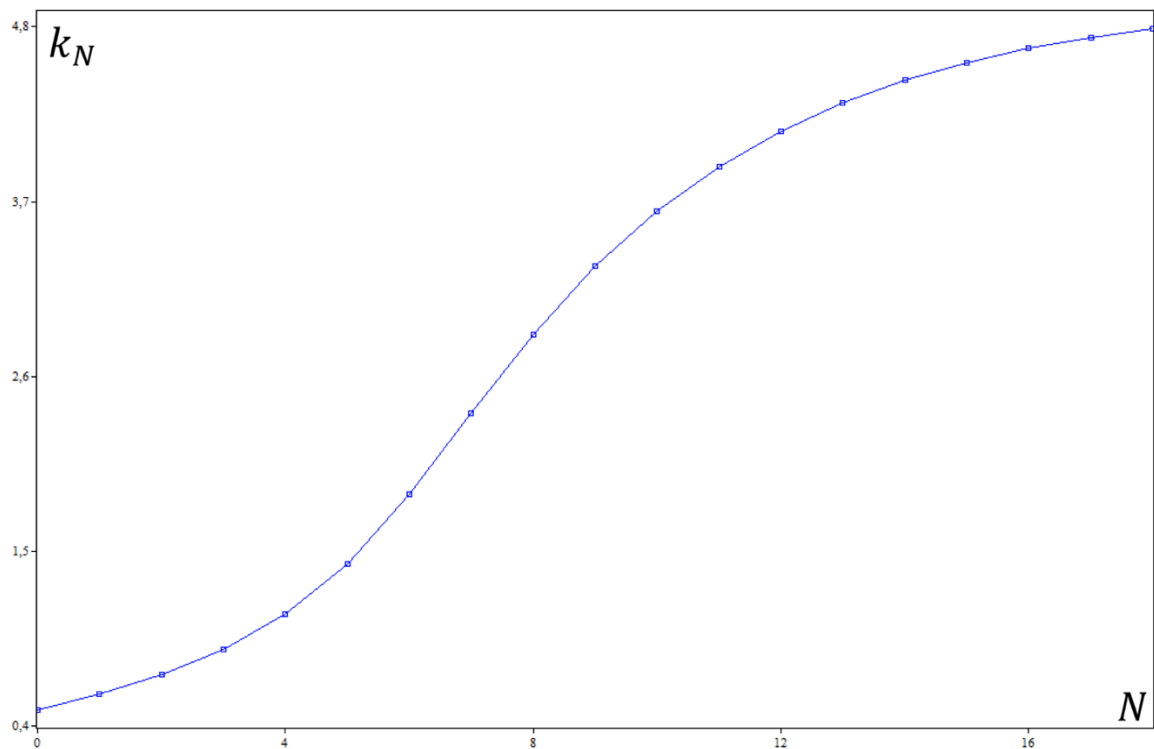


Рисунок 3.7 – Часовий ряд рівняння (3.2)

Для обраної точки $k_0 = 0.5$ запишемо ряд збільшень (таблиця 3.1):

Таблиця 3.1 – Ітераційна зміна значень k_t

t	k_t	k_{t-1}	$k_t - k_{t-1}$
1	0,60470732	0,5	0,10470732
2	0,73078839	0,60470732	0,12608107
3	0,88712892	0,73078839	0,15634053
4	1,1039884	0,88712892	0,21685948
5	1,4317991	1,1039884	0,3278107

6	1,865518	1,4317991	0,4337189
7	2,384972	1,865518	0,519454
8	2,8792098	2,384972	0,4942378
9	3,3078854	2,8792098	0,4286756
10	3,6558692	3,3078854	0,3479838
11	3,9382907	3,6558692	0,2824215
12	4,1652367	3,9382907	0,226946
13	4,3518367	4,1652367	0,1866
14	4,4779177	4,3518367	0,126081
15	4,5939123	4,4779177	0,1159946

Обчислимо збільшення змінної k_t (капітал на душу населення):

$$\Delta(k_{15}) = k_{15} - k_0 = 4.5939123 - 0.5 = 4.0939123 \approx 4.1$$

Збільшення капіталу обчислюємо за формулою:

$$\Delta(K_\beta) = K_\beta - K_0 = (k_\beta(1+n)^\beta - k_0)L_0$$

Збільшення капіталу за той же період для нашої задачі складає:

$$\begin{aligned} \Delta(K_{15}) &= K_{15} - K_0 = (4.5939123(1.01)^{15} - 0.5)L_0 \approx \\ &\approx (4.6 \cdot 1.16 - 0.5)L_0 = 4.836 \cdot L_0 \end{aligned}$$

Ітераційно підрахуємо значення $f(k_t)$ (таблиця 3.2):

Таблиця 3.2 – Ітераційна зміна значень $f(k_t)$

t	k_t	$f(k_t)$
1	0.60470732	0.83963979

2	0.73078839	1.040411
3	0.88712892	1.3651879
4	1.1039884	1.8434958
5	1.4317991	2.4635245
6	1.865518	3.0304079
7	2.384972	3.3374698
8	2.8792098	3.4555705
9	3.3078854	3.491
10	3.6558692	3.514621
11	3.9382907	3.514621
12	4.1652367	3.5264309
13	4.3518367	3.5254309
14	4.4779177	3.5254309
15	4.5939123	3.5254309

На рис. 3.8 зображено графік $y_t = f(k_t)$.

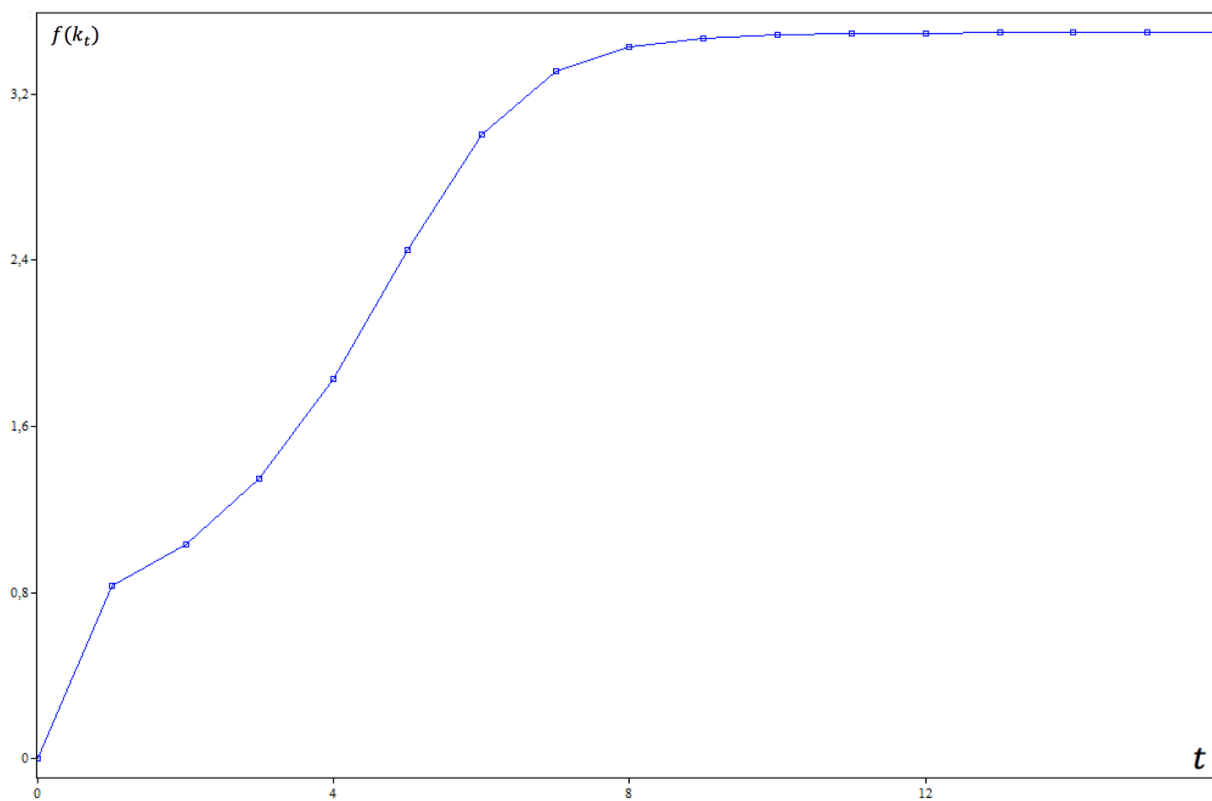


Рисунок 3.8 – Графік залежності значень $f(k_t)$ від t

$$\frac{k_{15}}{k_1} = \frac{4.5939123}{0.60470732} = 7.5969.$$

k_t збільшилось у 7.5 разів за розглянутий період.

$$\frac{y_{15}}{y_1} = \frac{3.5254309}{0.83963979} = 4.1987.$$

y_t збільшилось у 4.2 рази за розглянутий період.

Тепер побудуємо біфуркаційні діаграми, щоб побачити вплив параметрів моделі на положення її нерухомої точки.

На рис. 3.9 можна помітити, що збільшення A спричиняє суттєве зміщення нерухомої точки вправо по осі OX .

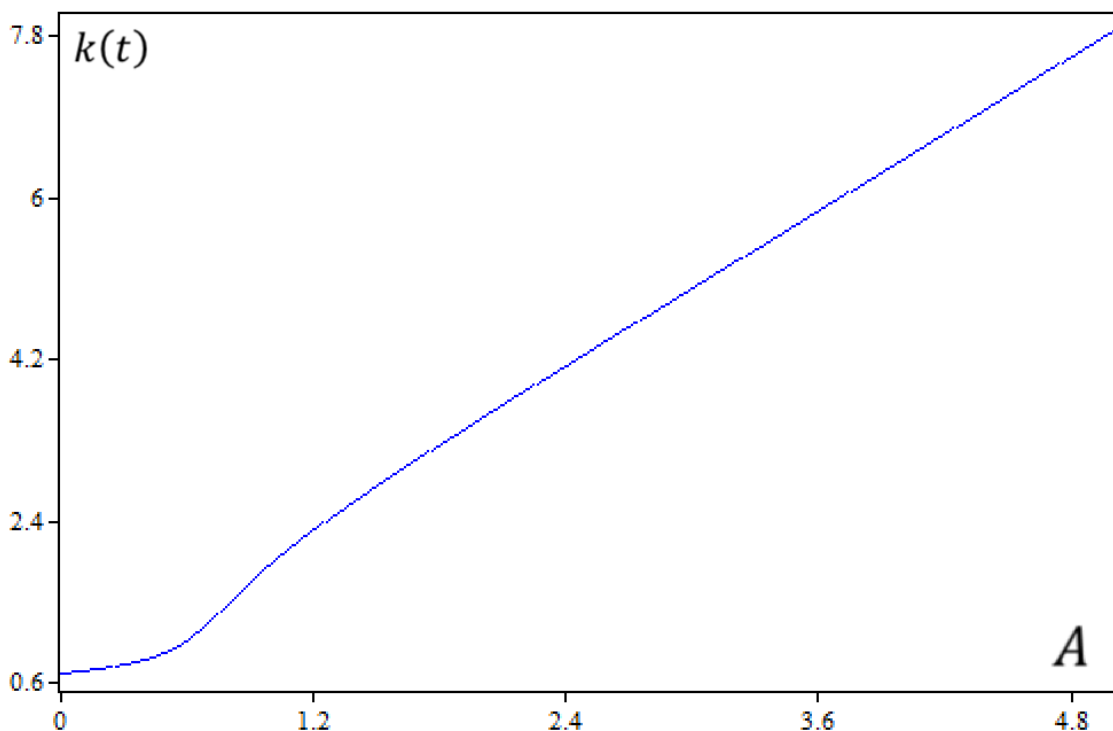


Рисунок 3.9 – Біфуркаційна діаграма для параметра A

Збільшення α також суттєво зміщує нерухому точку вправо по OX , однак з часом вона досягає свого граничного значення, що видно на рис. 3.10.

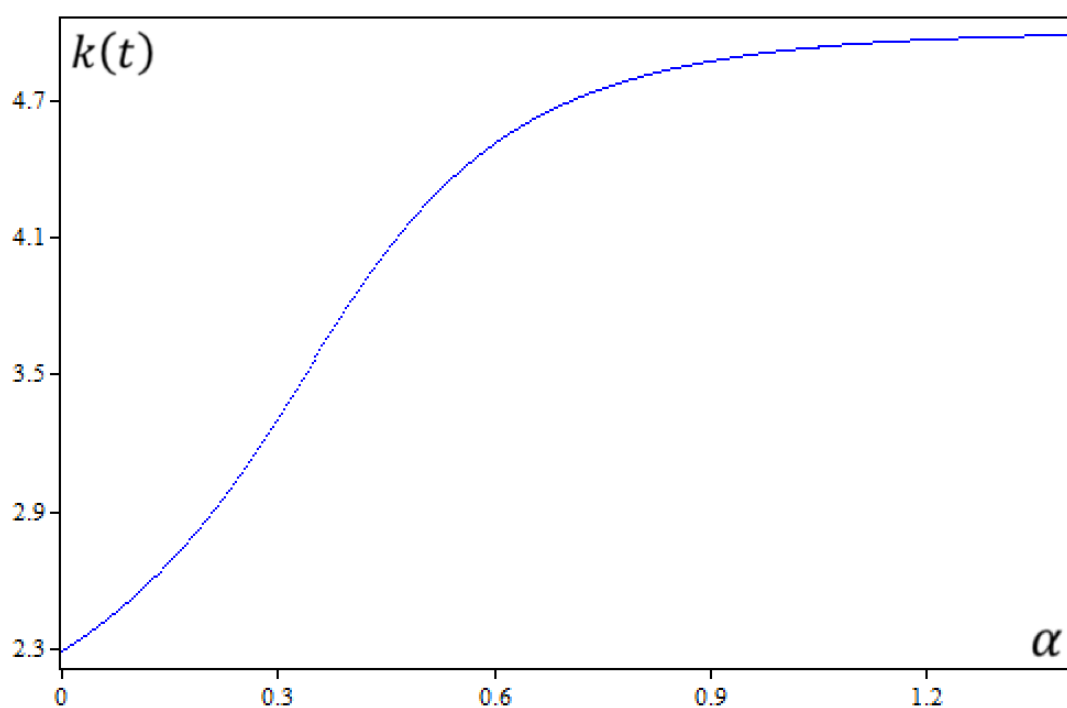


Рисунок 3.10 – Біфуркаційна діаграма для параметра α

Збільшення B незначно зміщує нерухому точку моделі вліво по осі абсцис (рис. 3.11).

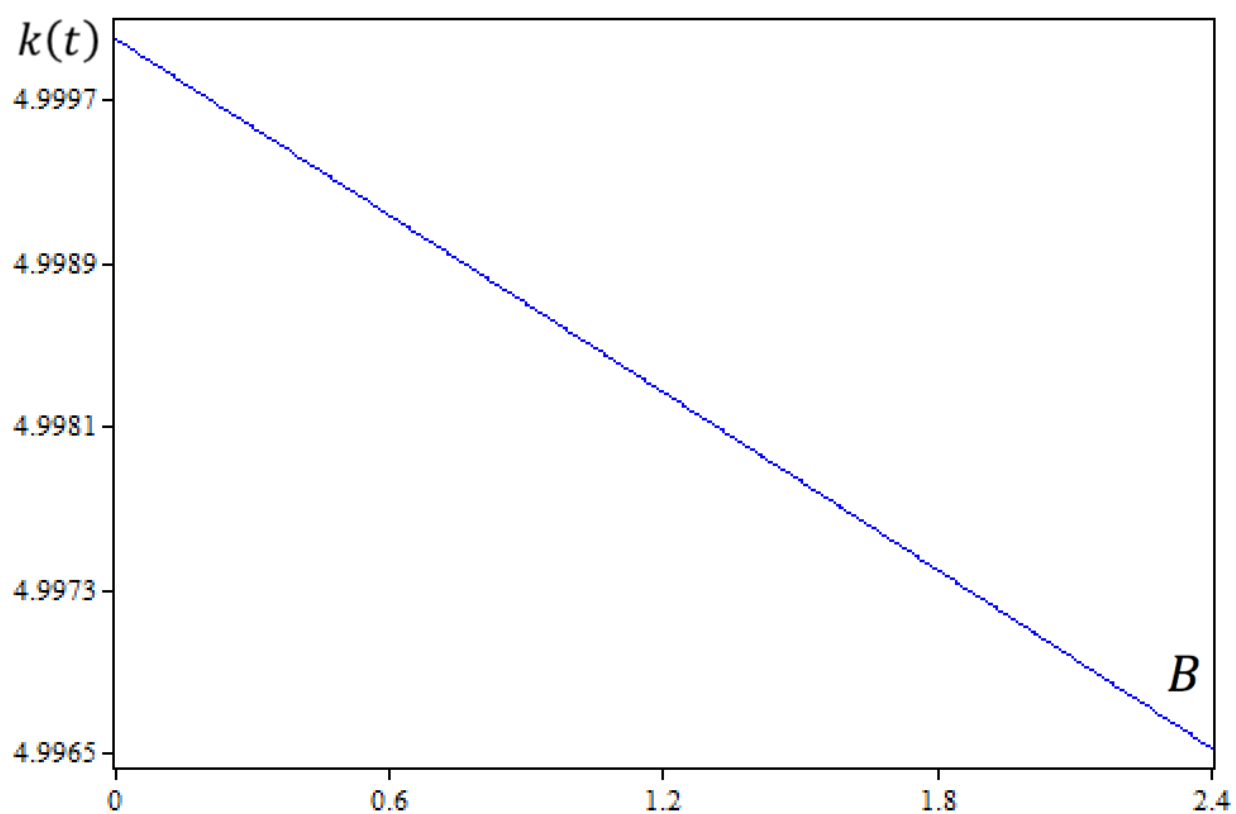


Рисунок 3.11 – Біфуркаційна діаграма для параметра B

Збільшення параметра d також зміщує нерухому точку вліво, яка в певний момент досягає свого граничного значення, що можна побачити на рис. 3.12.

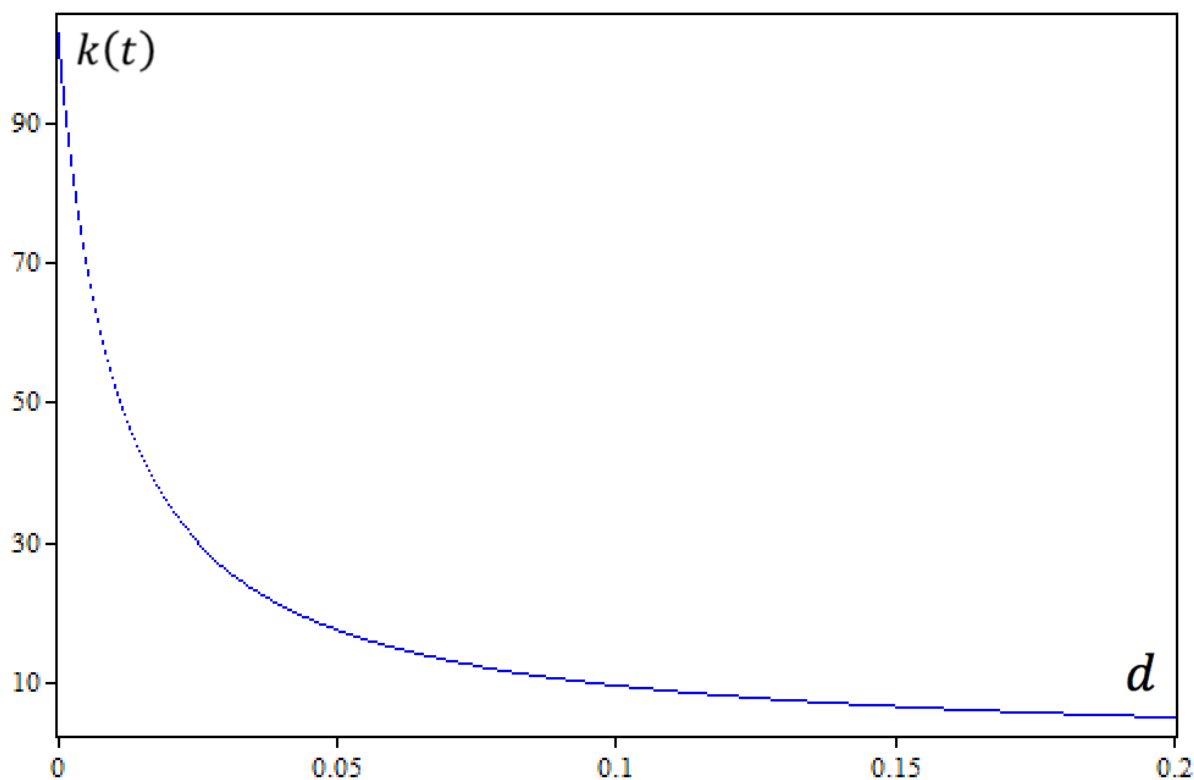


Рисунок 3.12 – Біфуркаційна діаграма для параметра d

На рис. 3.13 помітно, що нерухома точка незначно зміщується вліво при збільшенні параметра m .

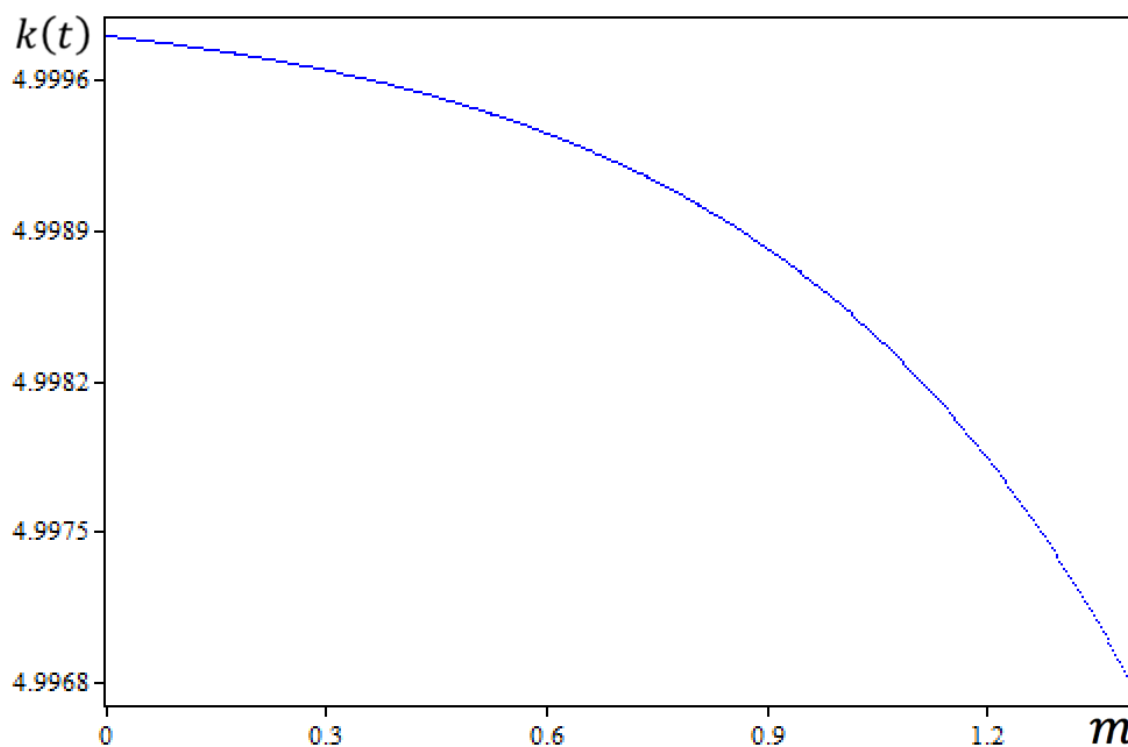
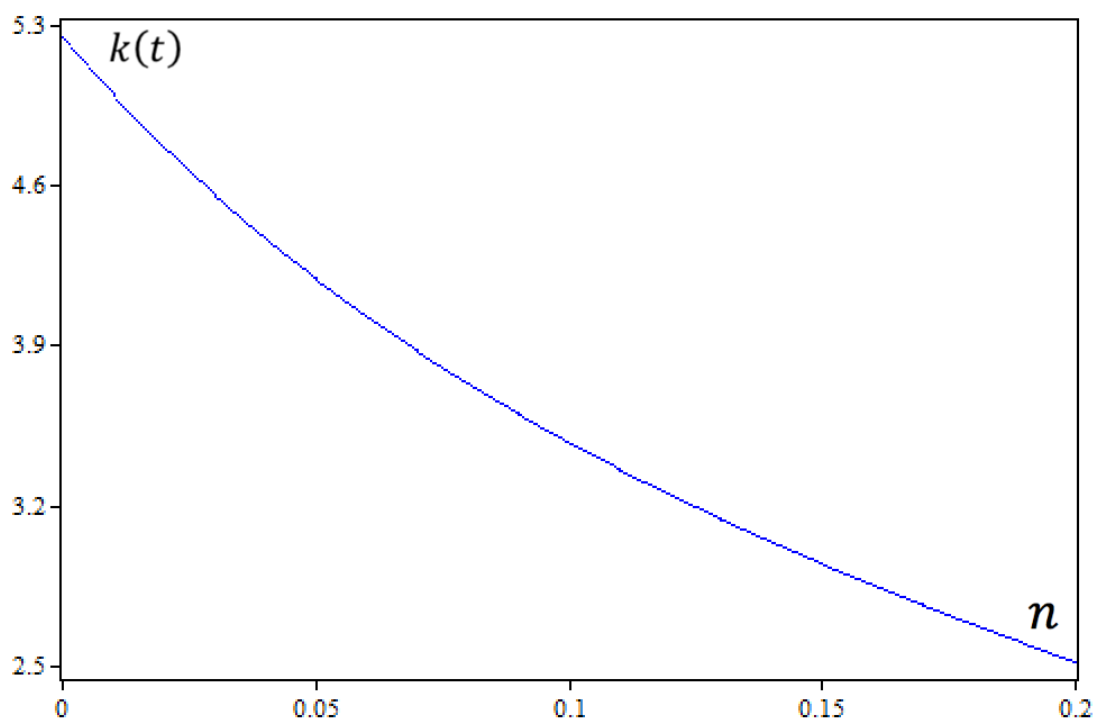


Рисунок 3.13 – Біфуркаційна діаграма для параметра m

Збільшення параметра n тягне за собою зміщення нерухомої точки вліво по осі абсцис, що можна помітити на рис. 3.14.

Рисунок 3.14 – Біфуркаційна діаграма для параметра n

Збільшення параметра s зміщує нерухому точку нашої моделі вправо по осі OX , рис. 3.15.

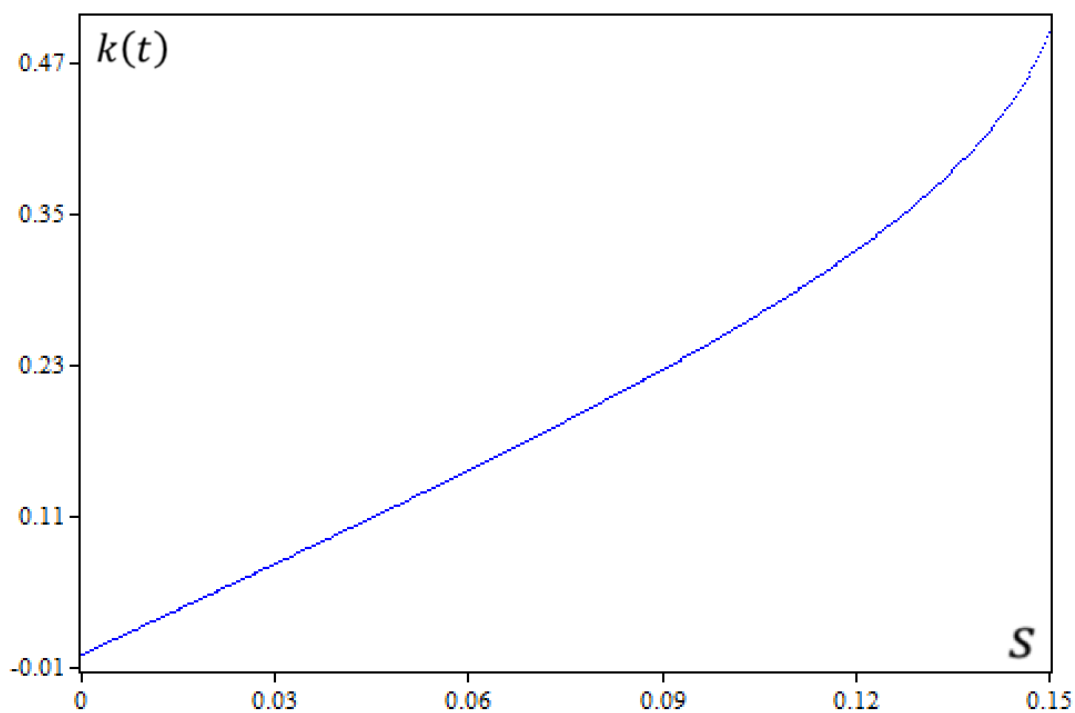


Рисунок 3.15 – Біфуркаційна діаграма для параметра s

Визначимо стійкість по діаграмі Ляпунова (рис. 3.16-3.18) для трьох найкращих параметрів, а саме A , α та s відповідно:

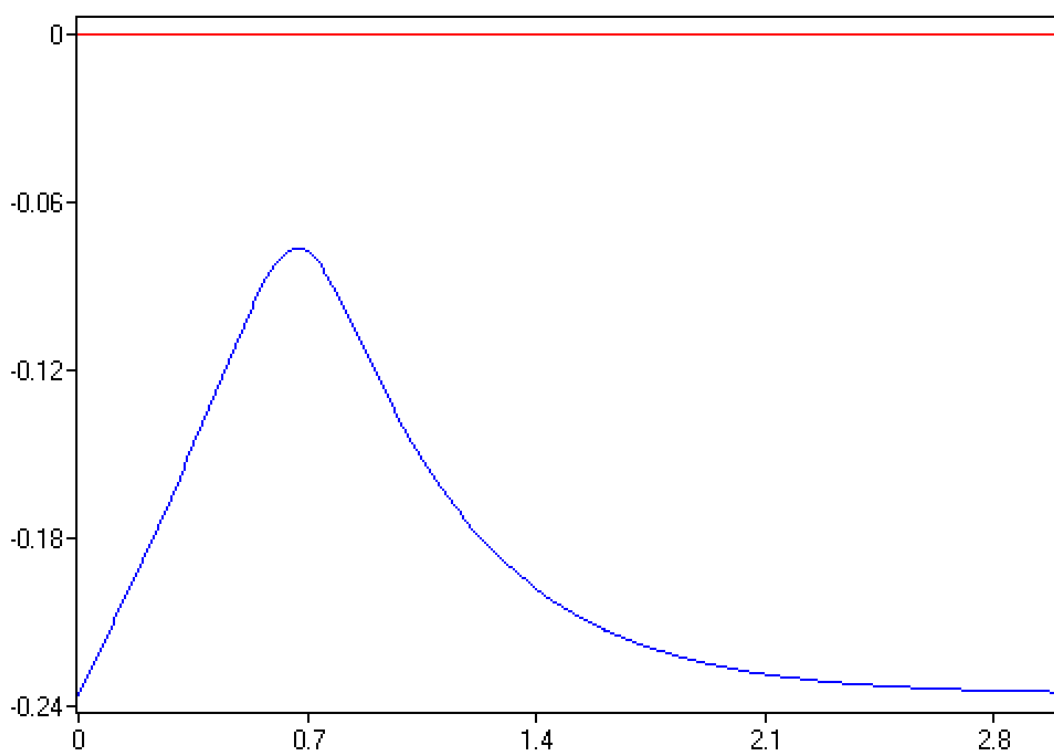
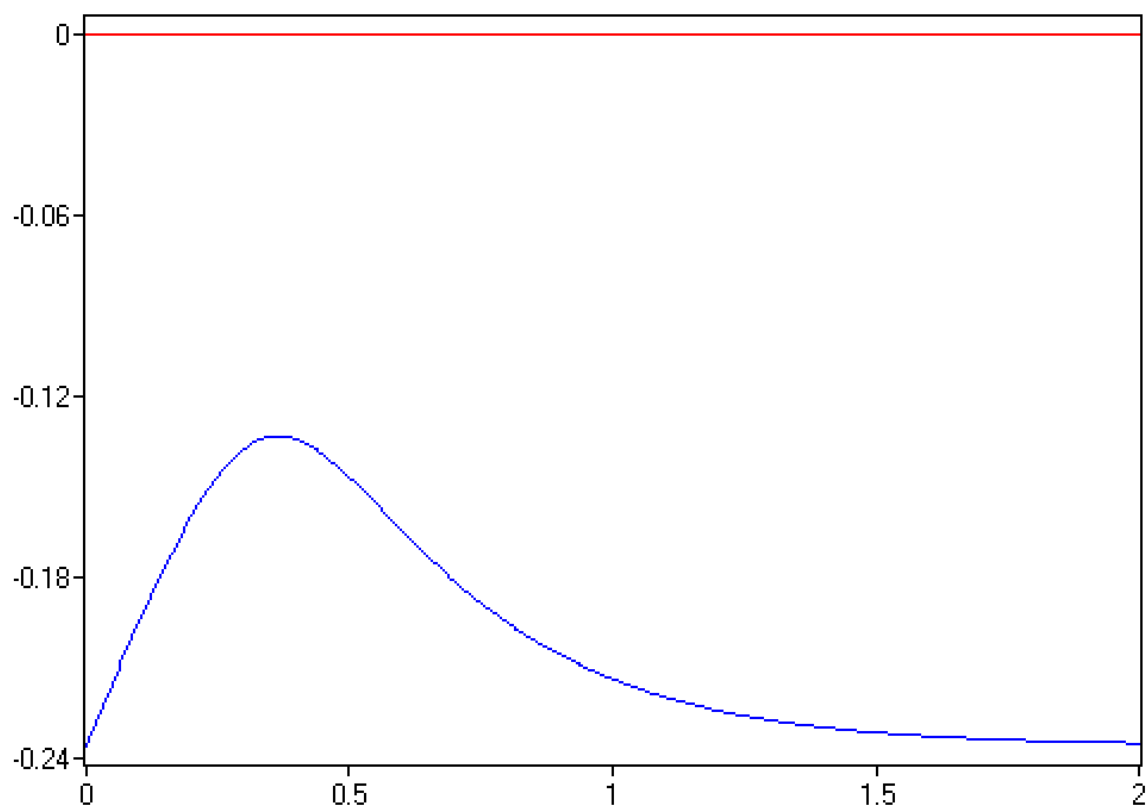
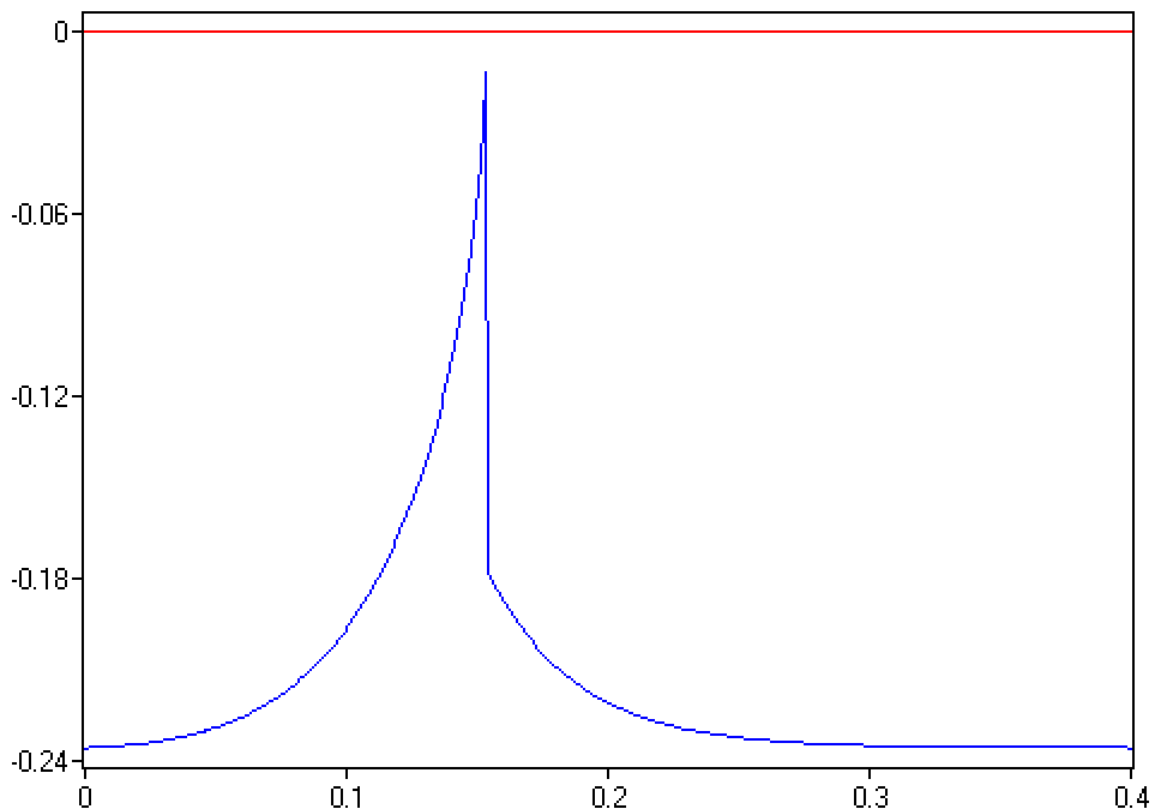
Рисунок 3.16 – Діаграма Ляпунова для параметра A 

Рисунок 3.17 – Діаграма Ляпунова для параметра α Рисунок 3.18 – Діаграма Ляпунова для параметра s

3.3 Висновки за розділом 3

У наш час кількість застосування нелінійних динамічних моделей в економіці та фінансах значно збільшилось. Чисельне моделювання має вирішальне значення при дослідженні нелінійних систем.

Даний розділ спрямований на дослідження та аналіз росту моделі Солоу на основі s -функції Джонсона за допомогою програмного пакету E&F Chaos. Цей пакет програм необхідний для моделювання нелінійних динамічних моделей для дослідження стійкості стаціонарних станів за допомогою часових рядів, фазових графіків, біфуркаційних діаграм, діаграм Ляпунова та графічного аналізу.

Використовуючи E&F Chaos було розглянуто три випадки поведінки економіки, проте були зроблені висновки, що ріст економіки можливий лише у

першому випадку, так як два інших випадки демонструють спад та періодичну поведінку економіки країни. Також був проведений аналіз, як параметри впливають на модель.

РОЗДІЛ 4. ФУНКЦІОНАЛЬНО-ВАРТІСНИЙ АНАЛІЗ ПРОГРАМНОГО ПРОДУКТУ

4.1 Постановка завдання проектування

Проводиться оцінка основних характеристик програмного продукту, призначеного для побудови та аналізу моделей економічного розвитку. Моделювання проводиться у середовищі розробки E&F Chaos.

4.2 Обґрунтування функцій програмного продукту

Головна функція F_0 – використання програмного продукту, який отримує на вхід дані моделі, та будує її для аналізу та оцінки. Виходячи з конкретної мети, можна виділити наступні основні функції ПП:

F_1 – вибір мови програмування: а) Python; б) E&F Chaos (Delphi);

F_2 – інтерфейс користувача: а) з підтримкою компонент; б) тільки з вікном для введення коду;

F_3 – робота з вхідними даними: а) введення у вікно програми; б) введення в програмному коді.

Варіанти реалізації основних функцій наведені у морфологічній карті системи (рис. 4.1). На основі цієї карти побудовано позитивно-негативну матрицю варіантів основних функцій (табл. 4.1).



Рисунок 4.1 – Морфологічна карта

Таблиця 4.1 – Позитивно-негативна матриця

Основні функції	Варіанти реалізації	Переваги	Недоліки
$F1$	A	Кросплатформений	Написання коду займає багато часу
	B	Написання лише коду моделі	Не кросплатформений
$F2$	A	Наглядність	Довший шлях до цільової дії
	B	Швидкий процес	Знання мови програмування
$F3$	A	Зручність та швидкодія	Обмежений функціонал
	B	Можливість підлаштовувати програму під себе	Складність вивчення

На основі аналізу позитивно-негативної матриці робимо висновок, що при використанні програмного продукту деякі варіанти функцій варто

відкинути, тому, що вони не відповідають поставленим перед програмним продуктом задачам. Ці варіанти відзначені у морфологічній карті.

Функція F1:

Оскільки швидкість отримання фінального результату дуже важлива – варіант а) маємо відкинути.

Функція F2:

Інтерфейс користувача відіграє важливу роль у даному програмному продукті, тому варіант б) має бути відкинутий.

Функція F3:

Вводити дані в програму можна будь-яким чином, тому залишаємо обидва варіанти.

Таким чином, будемо розглядати такі варіанти використання ПП:

F1б – F2а – F3а

F1б – F2а – F3б

4.3 Обґрунтування системи параметрів ПП

Для того, щоб охарактеризувати програмний продукт, будемо використовувати наступні параметри:

X1 – швидкодія мови програмування;

X2 – об'єм пам'яті для збереження даних;

X3 – час обробки даних;

X4 – потенційний об'єм програмного коду.

Гірші, середні і кращі значення параметрів вибираються на основі вимог замовника та умов функціонування у табл. 4.2.

Таблиця 4.2 – Основні параметри ПП

Назва Параметра	Умовні позначенн я	Одиниці виміру	Значення параметра		
			гірші	середні	кращі

Швидкодія мови програмування	X1	Оп/мс	2000	10000	15000
Об'єм пам'яті для збереження даних	X2	Мб	32	16	8
Час обробки запитів користувача	X3	мс	600	300	80
Потенційний об'єм програмного коду	X4	кількість строк коду	2000	800	200

За даними таблиці 4.2 будуються графічні характеристики параметрів – рис. 4.2 – рис. 4.5.

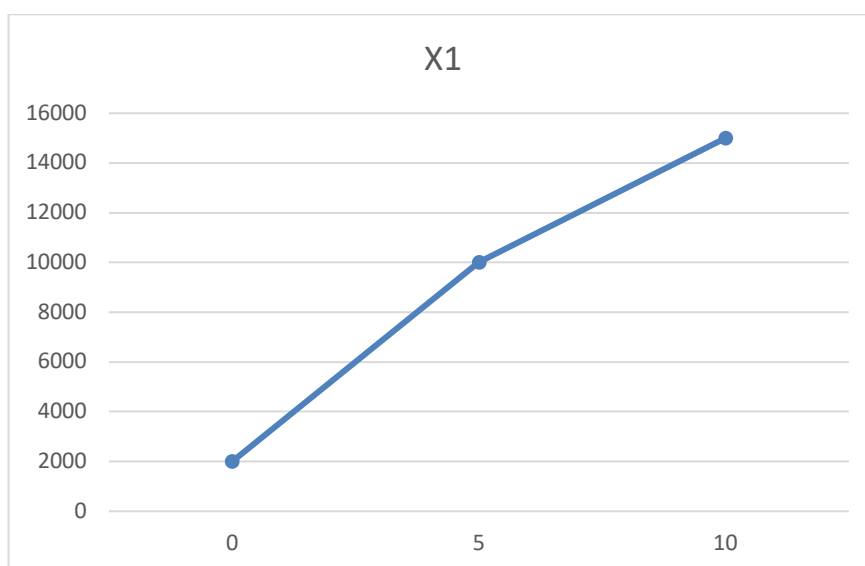


Рисунок 4.2 – X1, швидкодія мови програмування

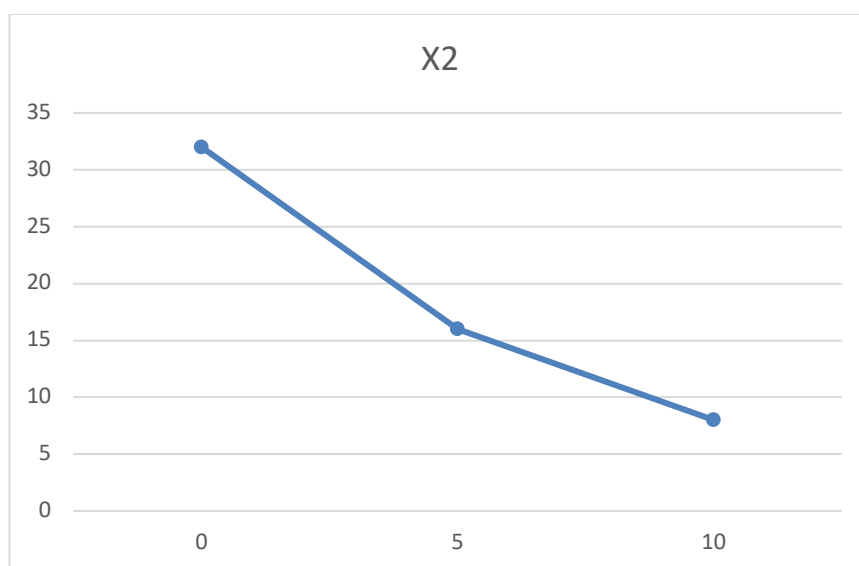


Рисунок 4.3 – X2, об'єм пам'яті для збереження

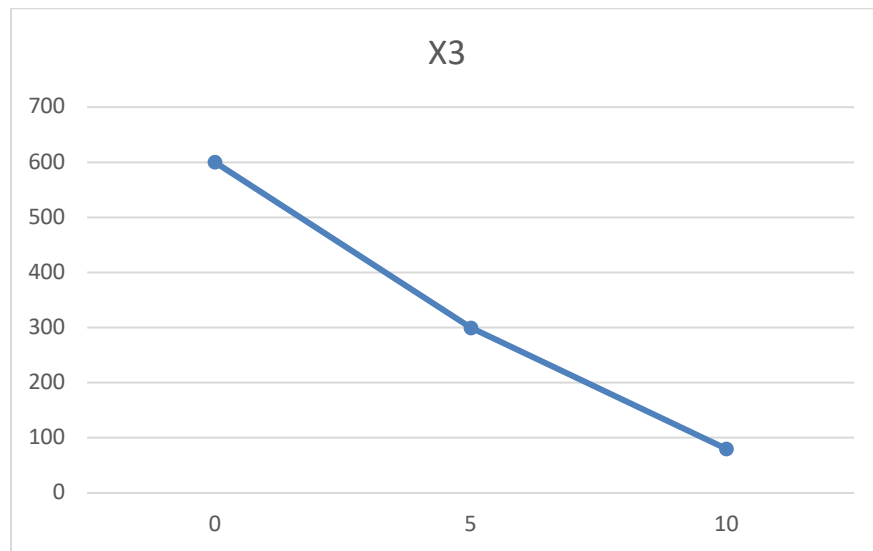


Рисунок 4.4 – X3, час виконання запитів користувача

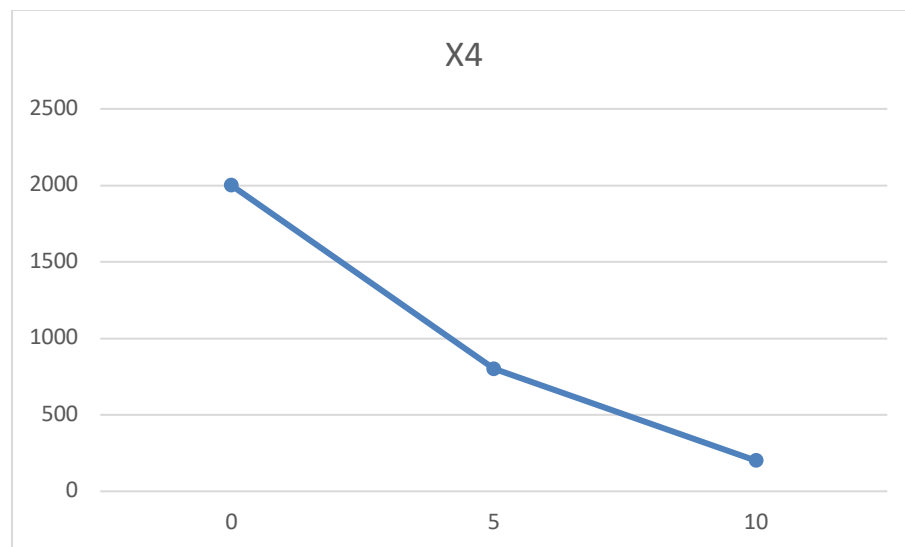


Рисунок 4.5 – X4, потенційний об'єм програмного коду

Проведемо ранжування параметрів за допомогою експертів (таблиця 4.3).

Таблиця 4.3 – Результати ранжування параметрів

Позначення параметра	Назва параметра	Одиниці виміру	Ранг параметра за оцінкою експерта							Сума рангів R_i	Відхилення Δ_i	Δ_i^2
			1	2	3	4	5	6	7			
X1	Швидкість мови програмування	Оп/мс	4	3	4	3	4	3	4	25	7.5	56.25
X2	Об'єм пам'яті для збереження	Мб	1	1	2	1	3	1	1	10	-7.5	56.25

	даних											
X_3	Час обробки запитів користувача	Мс	2	2	1	2	1	2	2	12	-5.5	30.25
X_4	Потенційний об'єм програмного коду	кількість строк коду	3	4	3	4	2	4	3	23	5.5	30.25
	Разом		10	10	10	10	10	10	10	70	0	173

Найменший ранг = 1, найбільший = 4.

Для перевірки степені достовірності експертних оцінок, визначимо наступні параметри:

а) сума рангів кожного з параметрів і загальна сума рангів:

$$R_i = \sum_{j=1}^N r_{ij} R_{ij} = \frac{Nn(n+1)}{2} = 70,$$

де N – число експертів, n – кількість параметрів;

б) середня сума рангів:

$$T = \frac{1}{n} R_{ij} = 17.5$$

в) відхилення суми рангів кожного параметра від середньої суми рангів:

$$\Delta_i = R_i - T$$

Сума відхилень по всім параметрам повинна дорівнювати 0;

г) загальна сума квадратів відхилення:

$$S = \sum_{i=1}^N \Delta_i^2 = 173$$

Порахуємо коефіцієнт узгодженості:

$$W = \frac{12S}{N^2(n^3 - n)} = \frac{12 \cdot 173}{7^2(4^3 - 4)} = 0.706 > W_k = 0.67$$

Ранжування можна вважати достовірним, оскільки коефіцієнт узгодженості більше нормативного, який дорівнює 0,67.

Тепер необхідно порівняти ранги параметрів (таблиця 4.4).

Таблиця 4.4 – Попарне порівняння параметрів

Параметри	Експерти							Кінцева оцінка	Числове значення
	1	2	3	4	5	6	7		
X1 і X2	>	>	>	>	>	>	>	>	1.5
X1 і X3	>	>	>	>	>	>	>	>	1.5
X1 і X4	>	<	>	<	>	<	>	>	1.5
X2 і X3	<	<	>	<	>	<	<	<	0.5
X2 і X4	<	<	<	<	>	<	<	<	0.5
X3 і X4	<	<	<	<	<	<	<	<	0.5

За результатами порівняння параметрів розрахуємо їх вагомість (таблиця 4.5).

Таблиця 4.5 – Розрахунок вагомості параметрів

Параметри x_i	Параметри x_j				Перша ітер.		Друга ітер.		Третя ітер.	
	X1	X2	X3	X4	b_i	K_{Bi}	b_i^1	K_{Bi}^1	b_i^2	K_{Bi}^2
X1	1.0	1.5	1.5	1.5	5.5	0.344	21.25	0.360	77.875	0.3605

X2	0.5	1.0	0.5	0.5	2.5	0.156	9.25	0.157	34.125	0.158
X3	0.5	1.5	1.0	0.5	3.5	0.219	12.25	0.208	44.875	0.2078
X4	0.5	1.5	1.5	1.0	4.5	0.281	16.25	0.275	59.125	0.2737
Всього:					16	1	59	1	216	1

Визначаємо рівень якості кожного варіанту виконання основних функцій окремо (таблиця 4.6).

Таблиця 4.6 – Розрахунок показників рівня якості варіантів реалізації основних функцій ПП

Основні функції	Варіант реалізації функції	Параметри	Абсолютне значення параметра	Бальна оцінка параметра –	Коефіцієнт вагомості параметра	Коефіцієнт рівня якості
F1	Б	X1	15000	10	0.3605	3.605
F2	А	X2	8	10	0.158	1.58
F3	А	X3	450	2	0.2078	0.4156
		X4	1200	3	0.2737	0.8211
	Б	X3	100	9	0.2078	1.8702
		X4	300	9	0.2737	2.4633

За даними з таблиці 4.6 за формулою

$$K_K = K_{Ty}[F_{1k}] + K_{Ty}[F_{2k}] + \dots + K_{Ty}[F_{zk}],$$

визначаємо рівень якості кожного з варіантів:

$$K_{K1} = 3.605 + 1.58 + 0.4156 + 0.8211 = 6.4217$$

$$K_{K2} = 3.605 + 1.58 + 1.8702 + 2.4633 = 9.5185$$

Як видно з розрахунків, кращим є другий варіант, для якого коефіцієнт технічного рівня має найбільше значення.

4.4 Економічний аналіз варіантів розробки ПП

Для визначення вартості використання ПП спочатку проведемо розрахунок трудомісткості.

Всі варіанти включають в себе два окремих завдання:

1. Розробка програмного продукту
 - Для першого варіанту реалізації використовуємо Python
 - Для другого варіанту реалізації використовуємо E&F Chaos
2. Підготовка моделі для побудови;

Для першого завдання (варіант А, ступінь новизни Б, група складності 1, використана інформація – НДІ) $T_P = 64$, $K_P = 1.021$, $K_{СК} = 1$, $K_{СТ} = 0.8$, $K_{СТ.М} = 1.4$

$$T_1^1 = 64 * 1.021 * 1 * 0.8 * 1.4 = 73.185 \text{ людино-днів.}$$

Для першого завдання (варіант Б, ступінь новизни В, група складності 1, використана інформація – НДІ) $T_P = 43$, $K_P = 0.81$, $K_{СК} = 1$, $K_{СТ} = 0.6$, $K_{СТ.М} = 1$

$$T_1^2 = 43 * 0.81 * 1 * 0.6 * 1 = 21 \text{ людино-день.}$$

Для другого завдання (ступінь новизни В, група складності 3, використана інформація – НДІ та ПІ) $T_P = 12$, $K_{СК} = 1$, $K_{СТ} = 1$, $K_{СТ.М} = 1$

$$K_P = \frac{K_1 n + K_2 m}{n + m} = \frac{1 * 3 + 0.6 * 2}{2 + 3} = 0.84$$

$$T_2 = 12 * 0.84 * 1 * 0.6 * 1 = 6.048 \text{ людино-днів.}$$

Складаємо трудомісткість відповідних завдань для кожного з обраних варіантів реалізації програми, щоб отримати їх трудомісткість:

$$T_I = 73.185 + 6.048 = 79.233$$

$$T_{II} = 21 + 6.048 = 27.048$$

Найбільш високу трудомісткість має варіант І.

В розробці беруть участь один аналітик з окладом 15000 грн., один програміст з окладом 12000 грн. Визначимо зарплату за годину за формулою:

$$CЧ = \frac{M}{T_m * t} = \frac{15000 + 12000}{2 * 21 * 8} = 80.36 \text{ грн.}$$

Тоді, розрахуємо заробітну плату за формулою

$$CЗП = C_ч * T_i * КД.$$

Зарплата розробників за варіантами становить:

$$\text{І.} \quad CЗП = 80.36 \cdot 79.233 \cdot 1.2 = 7640.6 \text{ грн.}$$

$$\text{ІІ.} \quad CЗП = 80.36 \cdot 27.048 \cdot 1.2 = 2608.29 \text{ грн.}$$

Відрахування на єдиний соціальний внесок становить 22%:

$$\text{І.} \quad C_{ВІД} = CЗП \cdot 0.22 = 7640.6 \cdot 0.22 = 1680.932 \text{ грн.}$$

$$\text{ІІ.} \quad C_{ВІД} = CЗП \cdot 0.22 = 2608.29 \cdot 0.22 = 573.824 \text{ грн. (менший за мінімальний) = 1039.06 грн.}$$

Тепер визначимо витрати на оплату однієї машино-години. (C_M)

Так як одна ЕОМ обслуговує одного програміста з окладом 12000 грн., з коефіцієнтом зайнятості 0,2 то для однієї машини отримаємо:

$$C_Г = 12 \cdot M \cdot K_3 = 12 \cdot 12000 \cdot 0.2 = 28800 \text{ грн.}$$

З урахуванням додаткової заробітної плати:

$$C_{3П} = C_{Г} \cdot (1 + K_3) = 28800 \cdot (1 + 0.2) = 34560 \text{ грн.}$$

Відрахування на єдиний соціальний внесок:

$$C_{ВІД} = C_{3П} \cdot 0.22 = 34560 \cdot 0.22 = 7603.2 \text{ грн.}$$

Амортизаційні відрахування розраховуємо при амортизації 15% та вартості ЕОМ – 25000 грн.

$$C_A = K_{ТМ} \cdot K_A \cdot Ц_{ПР} = 1.05 \cdot 0.15 \cdot 25000 = 3937.5 \text{ грн.}$$

Витрати на ремонт та профілактику розраховуємо як:

$$C_P = K_{ТМ} \cdot Ц_{ПР} \cdot K_P = 1.05 \cdot 25000 \cdot 0.03 = 787.5 \text{ грн.,}$$

де K_P – відсоток витрат на поточні ремонти.

Ефективний годинний фонд часу ПК за рік розраховуємо за формулою:

$$T_{ЕФ} = (D_K - D_B - D_C - D_P) \cdot t_3 \cdot K_B = (365 - 104 - 8 - 16) \cdot 8 \cdot 0.9 = 1706.4 \text{ годин.}$$

Витрати на оплату електроенергії розраховуємо за формулою:

$$C_{ЕЛ} = T_{ЕФ} \cdot N_C \cdot K_3 \cdot Ц_{ЕН} = 1706.4 \cdot 0.45 \cdot 0.95 \cdot 1.556124 = 1135.17 \text{ грн.}$$

Накладні витрати розраховуємо за формулою:

$$C_H = Ц_{ПР} \cdot 0.67 = 25000 \cdot 0.67 = 16750 \text{ грн.}$$

Тоді, річні експлуатаційні витрати будуть:

$$C_{\text{ЕКС}} = C_{\text{ЗП}} + C_{\text{ВІД}} + C_{\text{А}} + C_{\text{Р}} + C_{\text{ЕЛ}} + C_{\text{Н}}$$

$$C_{\text{ЕКС}} = 34560 + 7603.2 + 3937.5 + 787.5 + 1135.17 + 16750 = 64773.37 \text{ грн.}$$

Собівартість однієї машино-години ЕОМ дорівнюватиме:

$$C_{\text{М-Г}} = C_{\text{ЕКС}} / T_{\text{ЕФ}} = 64773.37 / 1706.4 = 37.96 \text{ грн/час.}$$

Оскільки в даному випадку всі роботи, які пов'язані з використанням програмного продукту ведуться на ЕОМ, витрати на оплату машинного часу, в залежності від обраного варіанта реалізації, складає:

$$C_{\text{М}} = C_{\text{М-Г}} \cdot T$$

$$\text{I. } C_{\text{М}} = 37.96 \cdot 79.233 = 3007.69 \text{ грн.};$$

$$\text{II. } C_{\text{М}} = 37.96 \cdot 27.048 = 1026.74 \text{ грн.};$$

Накладні витрати складають 67% від заробітної плати:

$$C_{\text{Н}} = C_{\text{ЗП}} \cdot 0.67$$

$$\text{I. } C_{\text{Н}} = 3007.69 \cdot 0.67 = 2015.15 \text{ грн.};$$

$$\text{II. } C_{\text{Н}} = 1026.74 \cdot 0.67 = 687.92 \text{ грн.};$$

Отже, вартість розробки ПП за варіантами становить:

$$C_{\text{ПП}} = C_{\text{ЗП}} + C_{\text{ВІД}} + C_{\text{М}} + C_{\text{Н}}$$

$$\text{I. } C_{\text{ПП}} = 7640.6 + 1680.932 + 3007.69 + 2015.15 = 14344.372 \text{ грн.};$$

$$\text{II. } C_{\text{ПП}} = 2608.29 + 1039.06 + 1026.74 + 687.92 = 5362.01 \text{ грн.};$$

4.5 Вибір кращого варіанта ПП техніко-економічного рівня

Розрахуємо коефіцієнт техніко-економічного рівня за формулою:

$$K_{TEPj} = K_{Kj} / C_{Фj},$$

$$K_{TEP1} = 5.288 / 14344.372 = 3.686 \cdot 10^{-4};$$

$$K_{TEP2} = 9.5185 / 5362.01 = 17.75 \cdot 10^{-4};$$

Як бачимо, другий варіант реалізації програми є більш ефективним з коефіцієнтом техніко-економічного рівня $K_{TEP2} = 17.75 \cdot 10^{-4}$.

4.6 Висновки за розділом 4

В даному розділі проведено повний функціонально-вартісний аналіз ПП, який було розроблено в рамках дипломної роботи. Процес аналізу можна умовно розділити на дві частини.

В першій з них проведено дослідження ПП з технічної точки зору: було визначено основні функції ПП та сформовано множину варіантів їх реалізації; на основі обчислених значень параметрів, а також експертних оцінок їх важливості було обчислено коефіцієнт технічного рівня, який і дав змогу визначити оптимальну з технічної точки зору альтернативу реалізації функцій ПП.

Другу частину ФВА присвячено вибору із альтернативних варіантів реалізації найбільш економічно обґрунтованого. Порівняння запропонованих варіантів реалізації в рамках даної частини виконувалось за коефіцієнтом ефективності, для обчислення якого були обчислені такі допоміжні параметри, як трудомісткість, витрати на заробітну плату, накладні витрати.

Після виконання функціонально-вартісного аналізу програмного комплексу що розроблюється, можна зробити висновок, що з альтернатив, що залишились після першого відбору двох варіантів виконання програмного комплексу оптимальним є перший варіант реалізації програмного продукту. У нього виявився найкращий показник техніко-економічного рівня якості $K_{TEP2} = 17.75 \cdot 10^{-4}$. Цей варіант реалізації програмного продукту має такі параметри:

- мова програмування – E&F Chaos (Delphi);
- інтерфейс користувача з підтримкою компонент;
- введення вхідних даних в програмному коді.

ВИСНОВКИ

Кожен громадянин країни, як учасник її економічного зростання, хоче покращення стану економіки, а відповідно і рівня життя. Таке прагнення призвело до появи різних економічних наук, в тому числі економічної теорії. Вчені зі всього світу почали досліджувати вплив зовнішніх та внутрішніх факторів на процеси розвитку економік різних країн. Відправною точкою в цих дослідженнях стала модель Солоу. Вона дає змогу дослідити темпи зміни капіталу в залежності від рівня технологічного прогресу, росту кількості населення та норми амортизації.

Була розглянута теорія нелінійних динамічних систем та їх особливостей, методи пошуку нерухомих точок та визначення їх стійкості. Описаний процес графічного аналізу побудованих моделей на основі часових рядів, фазових портретів, біфуркаційних діаграм та показників Ляпунова.

Побудувавши узагальнену модель росту Солоу на основі s -функції Джонсона. Провівши її кількісний та якісний аналіз, ми відмітили, що найбільш позитивний вплив на модель мають параметри A , α та s (величина насичення, «плавність» насичення та доля інвестицій від ВВП відповідно).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРИ

1. Дыхта В.А. Динамические системы в экономике. Введение и анализ одномерных моделей: учебное пособие. Иркутск: БГУЭП, 2003. 178 с.
2. Братусь А.С., Новожилов А.С., Платонов А.П. Динамические системы и модели в биологии. Москва: Физматлит, 2009. 400с.
3. R. J Barro, X. Sala-i-Martin Economic growth. Cambridge, Massachusetts: MIT Press, 2004. 672p.
4. C. Diks, C. Hommes, V. Panchenko, M. Tyszler Manual E&F Chaos Program. Amsteden: CeNDEF, 2008. 68p.
5. Хлебопрос Р.Г, Фет А.И. Принятие решений в экономике, экологии, политике. Модели катастроф. Новосибирск: Сибирский хронограф, 1999. 343с.
6. Шарковский А.Н. Существование циклов непрерывного преобразования прямой в себя. *Украинский математический журнал*. 1964. №16. С. 61–65.
7. Li T.Y., Yorke J.A. Period three implies chaos. *American Mathematical Monthly*. 1975. Vol. 82. P. 985 – 992.
8. Арнольд В.И. Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Ижевск: Ижевская республиканская типография, 2000. 400с.
9. Kuznetsov Y.A. Elements of Applied Bifurcation Theory. 3d edition. New York: Springer-Verlag, 2004. 632p.
10. Alligood K.T., Sauer T.D., and Yorke J.A. Chaos. An introduction to dynamical systems. New York: Springer-Verlag, 1996. 603p.
11. S. Homer, R. Sylla A history of interest rates. New Brunswick, NJ: Rutgers University Press, 1991. 662p.
12. N. Kaldor Capital Accumulation and Economic Growth: Proceedings of a Conference Held by the International Economics Association, Friedrich A. Lutz and Douglas C. Hague. London: MacMillan, 1963.

- 13.H. Uzawa On a two-sector model of economic growth. *Review of Economic Studies*. 1961. Vol. 29, No. 1. P. 40 – 47.
- 14.Schlicht, Ekkehart A Variant of Uzawa's Theorem. *Economics Bulletin*. 2006. Vol. 5. P. 1–5.
- 15.T. Piketty, E. Saez Income inequality in the united states 1913–1998. *The Quarterly Journal of Economics*. 2003. Vol. 118. P. 1 – 41.

ДОДАТКИ

ДИПЛОМНА РОБОТА
НА ЗДОБУТТЯ СТУПЕНЯ БАКАЛАВРА ЗА ОСВІТНЬО-
ПРОФЕСІЙНОЮ ПРОГРАМОЮ «СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ ТА
УПРАВЛІННЯ»
СПЕЦІАЛЬНОСТІ 124 «СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ»

НА ТЕМУ: «МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ЕКОНОМІЧНОГО ЗРОСТАННЯ
І ЇХ РОЛЬ В ЗАБЕЗПЕЧЕННІ СТАБІЛЬНОСТІ НАЦІОНАЛЬНОЇ
ЕКОНОМІКИ»

Керівник:

професор кафедри ММСА,
д.ф.м.н., Лопатін О.К.



Виконав:

Студент IV курсу, групи КА-64
Тихоненко Дмитро Володимирович

Рисунок А.1

Об'єкт, предмет і мета дослідження

- Об'єкт дослідження - закон еволюційного розвитку технологій та інноваційних процесів
- Предмет дослідження - узагальнення моделі економічного росту Солоу за рахунок вибору виробничої функції у вигляді s-кривої Джонсона
- Мета дослідження - дослідження математичних моделей економічного зростання та їх ролі в забезпеченні стабільності національної економіки



Рисунок А.2

Наша мета при дослідженні моделі Солоу:

- знайти стаціонарні рішення
- дослідити їх стійкість
- дослідити динаміку системи в залежності від значень параметрів рівняння



Рисунок А.3

Економічне зростання

Економічне зростання – це збільшення обсягу виробленої продукції в порівнянні з минулим роком, збільшення абсолютного розміру ВВП.

Тобто задачею кожної країни є збільшення рівня ВВП.

Що ж це нам дає?

- Підвищення якості життя
- Покращення позицій на міжнародній арені
- Вирішення глобальних проблем
- Збільшення об'ємів інвестицій

Хочеш жити краще? Збільшуй темпи економічного зростання.



Рисунок А.4

Економічні моделі

Для відображення економічного зростання використовують велику кількість моделей, кожна з яких має свої особливості.

Однак їх можна поділити на 2 категорії:

- неокласичні моделі;
- кейсіанські.

В даній роботі ми розглянемо модель росту Солоу, яка належить до неокласичних моделей.



Рисунок А.5

Модель росту Солоу

Виробнича функція має вигляд: $Y = F(A, K, L)$,
де K – капітал, L – робоча сила, A – технології.

Функція має незмінний ефект масштабу:

$$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K, L)$$

Часто розглядається як окремий випадок виробничої функції Кобба-Дугласа:

$$F(K, L) = K^{\alpha} (AL)^{1-\alpha}$$



Рисунок А.6

Оскільки виробнича функція відображає обсяг виробленої продукції, то також вона відображає і ВВП держави.

Отже маємо, що ВВП – це функція від капіталу, робочої сили і технологій.

Саме ці три чинники визначають економічне зростання.

І як показує нам історія, найкращим способом підвищити ВВП держави є розвиток технологій.



Рисунок А.7

s-функція Джонсона

s-функція Джонсона має вигляд:

$$f(k_t) = Ae^{-Be^{-\alpha(k_t-m)}}$$

На графіку зображена функція Джонсона з наступними параметрами:

- $\alpha = 2$;
- $A = 3$;
- $B = 1$;
- $m = 1$.

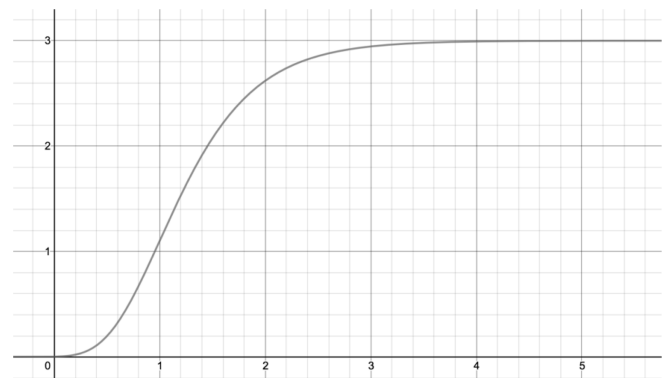


Рисунок А.8

Узагальнення моделі Солоу на основі s-функції Джонсона

З урахуванням s-функції Джонсона, модель Солоу набуває вигляду:

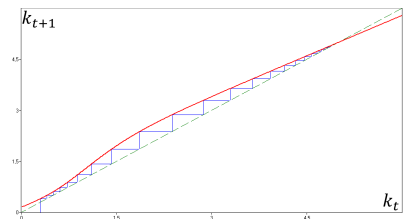
$$k_{t+1} = sf(k_t) + (1 - n - d)k_t$$

- k_t – капітал на душу населення;
- s – частка інвестицій від ВВП;
- n – частка зростання населення;
- d – частка амортизації і ремонту устаткування.

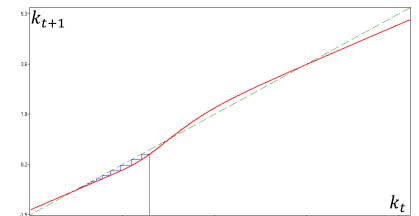
9

Рисунок А.9

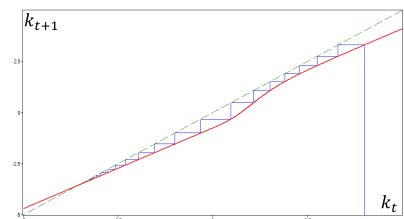
- *Випадок 1:* Одна стійка нерухома точка (крива $G(k_t)$ після точки k_0 проходить вище бісектриси)



- *Випадок 2:* Три нерухомі точки, серед яких дві стійкі і одна нестійка точка (крива $G(k_t)$ після точки k_0 перетинає бісектрису в двох точках)



- *Випадок 3:* Одна стійка нерухома точка (крива $G(k_t)$ після точки k_0 проходить нижче бісектриси)



10

Рисунок А.10

Розглянемо випадок 1, оскільки на практиці випадки 2 та 3 непридатні (в цих випадках нерухомі точки являються пастками)

Постановка задачі: потрібно побудувати траєкторію k_t , $t = 0, 1, 2, \dots, t_\beta$ для вибраної початкової точки $k_0, k_1, k_2, \dots, k_\beta$ та оцінити інтервал її зміни на інтервалі $[0, t_\beta]$.
 $\lim_{t \rightarrow \infty} k_t = k_*$. Необхідно визначити ступінь приближення до нерухомої точки k_* .

11

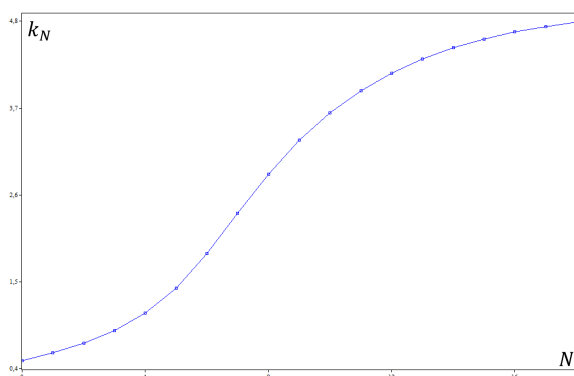
Рисунок А.11

Нерухома точка: $\lim_{t \rightarrow \infty} k_t = k_* = 5$

$p = 0.9$

$$k_\beta = pk_* = 0.9 \cdot 5 = 4.5$$

Отриманий часовий ряд для 1 випадку має наступний вигляд:



З малюнку бачимо що $\beta = 15$

Обчислимо збільшення змінної k_t
 (капітал на душу населення)

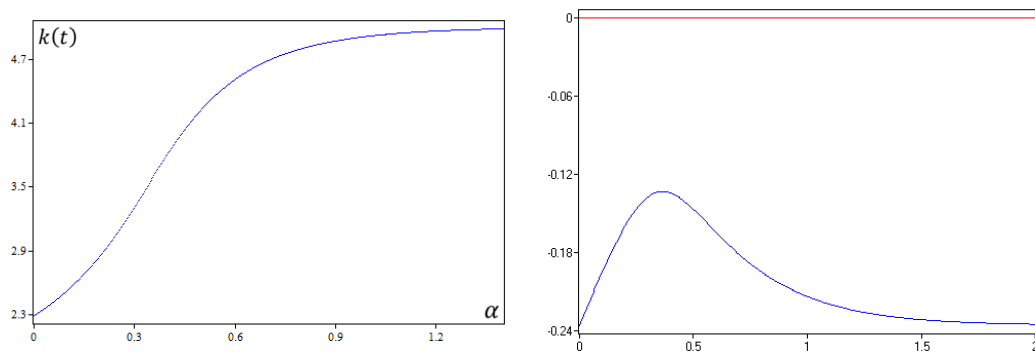
$$\Delta(k_{15}) = k_{15} - k_0 = 4.5939123 - 0.5 = 4.0939123 \approx 4.1$$

Збільшення капіталу за той же період для нашої задачі складає:

$$\Delta(K_{15}) = K_{15} - K_0 \approx 4.836 \cdot L_0$$

12

Рисунок А.12

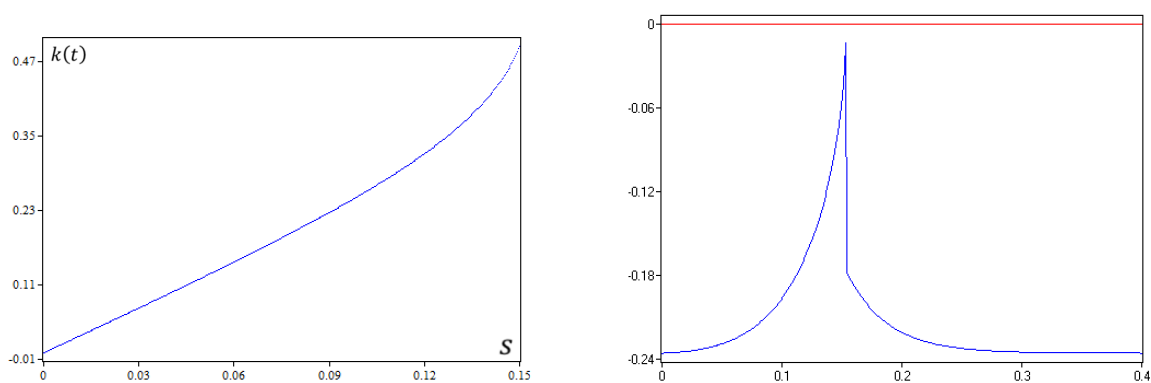


Розглянемо вплив показника α виробничої функції $f(k(t))$ на рівень капіталоозброєності $k(t)$ (Рисунок ліворуч) та значення старшого показника Ляпунова, як стійкості положення рівноваги.

13

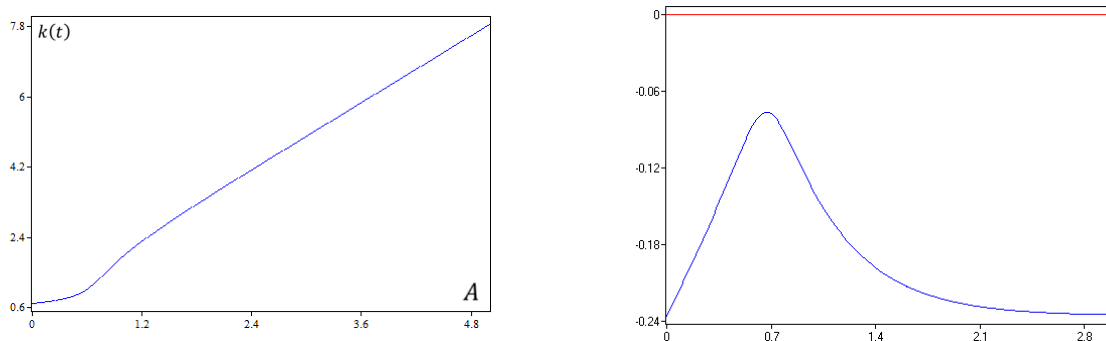
Рисунок А.13

Розглянемо приклад. Вплив параметра рівня заощаджень s рівняння на положення рівноваги та оцінка його стійкості через старші показники Ляпунова.



14

Рисунок А.14

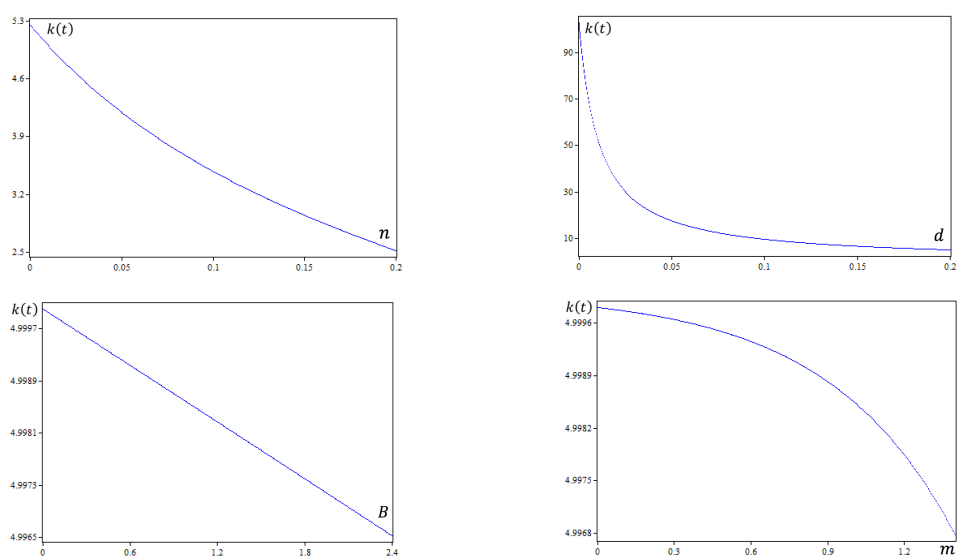


Розглянемо вплив показника A виробничої функції на положення рівноваги та оцінімо його стійкість через старші показники Ляпунова.

15

Рисунок А.15

Показники n, d, B та m в свою чергу зміщують нерухому точку вліво по осі OX .



16

Рисунок А.16

ВИСНОВКИ ТА ДОСЯГНЕННЯ ПО РОБОТІ

- Проведено систематичний аналіз впливу параметрів на положення точок рівноваги. Отримано основний висновок, що в широкому діапазоні параметрів єдиним видом аттрактора є положення рівноваги.
- Наведено алгоритм знаходження прирощення питомого і повного капіталу на інтервалі $[0, t_\beta]$.
- Знаходження t_β має принципове значення для рекомендацій зі зміни управління системою (зміна маркетингової стратегії, або зміна технології).

17

Рисунок А.17

ДЯКУЮ ЗА УВАГУ!

18

Рисунок А.18